Feuille d'exercices 19
Applications linéaires

Exercice 1 •◦◦ — Noyau et image d'applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ Soit la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$u : (x, y, z) \mapsto (y - x, 2y + z - 3x, -y + 2x).$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$. Que dire de u ?
3. Déterminer de même le noyau et l'image de la fonction

$$v : (x, y, z) \mapsto (x + y - 2z, -2x + y + z, x - 2y + z)$$

Exercice 2 •◦◦ — Applications linéaires, noyaux et rangs Montrer que les applications suivantes, toutes notées u, sont linéaires, puis déterminer leur noyau, leur image et leur rang.

1. La fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ (on pourra admettre qu'elle est linéaire) définie par

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-3x_1 + 2x_2 + x_3, -4x_1 + x_3 + x_4, -x_1 - 2x_2 + x_4, 8x_2 + x_3 - 3x_4).$$

2. La fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto z + i\overline{z}$. Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
3. La fonction de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $P \mapsto XP'$.
4. La fonction de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $P \mapsto P(X^2)$.
5. La fonction de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $P \mapsto X^2P' - 2XP$.
6. La fonction de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ définie par $M \mapsto M^T$.
7. La fonction de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie par $M \mapsto AM - MA$, où $A \in M_2(\mathbb{R})$ est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Les coefficients de A ont-ils joué pour la linéarité ?

Exercice 3 •◦◦ — Applications linéaires définies par trois images

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$u(0, 1, 1) = (0, 1), \quad u(1, 1, 1) = (1, 1) \quad \text{et} \quad u(0, 1, 0) = (1, 0).$$

2. Déterminer l'image par u d'un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 4 •◦◦ — Application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et (f_1, f_2, f_3) celle de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$u(e_1) = f_1 - f_3, \quad u(e_2) = f_1 - f_2 + f_3, \quad u(e_3) = 2f_1 + 2f_2 \quad \text{et} \quad u(e_4) = 3f_1 + 2f_2 - f_3.$$

2. Déterminer l'image d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^4$ de coordonnées dans la base canonique (x_1, x_2, x_3, x_4) (Si on a acquis le calcul matriciel, on peut l'utiliser !).
3. Déterminer une base de $\ker(u)$. L'application est-elle injective ?
4. En déduire $\mathrm{Im}(u)$. L'application est-elle surjective ?

Exercice 5 ••◦ — Sommes directes (ou pas)

1. Soit u la fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$u : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 - x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_4).$$

A-t-on $\mathbb{R}^4 = \ker(u) \bigoplus \mathrm{Im}(u)$?

2. Soit v la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$v : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (4x_1 - 2x_2 + 4x_3, x_1 - x_3, 4x_1 - 2x_2 + 4x_3).$$

A-t-on $\mathbb{R}^3 = \ker(v) \bigoplus \mathrm{Im}(v)$?

Exercice 6 ••◦ — Fonctions somme des coordonnées Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit u la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$u : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

1. Montrer que u est une application linéaire. Est-elle injective ? surjective ? Quel est son rang ?
2. Déterminer une base de $\ker(u)$.

Exercice 7 ●●○ — Image et noyau de la composée Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$:

1. Montrer que $\ker(u) \subset \ker(u^2)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$.
3. Montrer que $\ker(u) = \ker(u^2) \iff \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$.

Exercice 8 ●○○ — Composée nulle Soit E un espace vectoriel de dimension n, ainsi que u et v dans $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $v \circ u = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, u \subset \ker v$.
2. Quand la condition précédente est vérifiée, montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leqslant n$.

Exercice 9 ●●○ — Endomorphisme nilpotent Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = 0$, et que n est minimal pour cette propriété (c'est-à-dire que pour tout $k \in [\![0\,, n-1]\!]$, on a $u^k \neq 0$.

1. Dans le cas $E = \mathbb{R}^2$, donner un exemple d'un tel endomorphisme pour $n = 2$.
2. On revient au cas général. Montrer que $\mathrm{Id} - u$ est bijective, et donner son inverse.

Exercice 10 ●●○ — Endomorphisme de polynômes Soit u défini sur $\mathbb{R}_3[X]$ par

$$u(P) = (X^2 + 1)P''.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $\mathrm{Im}(u)$. Précisez la dimension de ces sous-espace vectoriels.

Exercice 11 ●●○ — Evaluation polynomiale en des points et interpolation Soit $n \in \mathbb{N}$, et soient $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ la donnée de $n+1$ points disctincts de $\mathbb{R}$. On définit $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ par

$$u(P) = (P(a_0), \ldots, P(a_n)).$$

1. Montrer que u est linéaire et injective.
2. En déduire que :

$$\forall (b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \exists! P \in \mathbb{R}_n[X],\ \text{tel que } \forall k \in [\![0\,, n]\!]\,, \quad P(a_k) = b_k.$$

3. Ce polynôme P est appelé "polynôme interpolateur de degré n aux points (a_k, b_k). Cela vous rappelle-t-il quelque chose ? Si oui, explicitez-le en utilisant des polynômes L_i « déjà vus ».

Exercice 12 ●●○ — Evaluation en deux points Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$u(P) = (P(2), P(3)).$$

1. On se place dans le cas $n = 1$. Déterminer une base de $\ker(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$. La fonction fonction u est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Même question pour $n = 2$.
3. Même question pour $n = 3$.
4. (Plus dur). On revient au cas $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Décrire $\ker(u)$.

Exercice 13 ●●○ — Endomorphisme avec la transposée Soit $u : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$u(M) = M - M^T.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Quelle nom et notation a-t-on donné pour $\ker(u)$ dans le chapitre sur les matrices ?
3. Retrouver la dimension de $\ker(u)$, en donner une base. Faire de même pour $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 14 ●●● — Endomorphisme avec la dérivée : lien avec une équation différentielle Soit $u : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par

$$u : f \mapsto f'' + f' - 2f.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\ker u$ et sa dimension.
3. La fonction $x \mapsto \sin x$ appartient-elle à $\mathrm{Im}\, u$?
4. Déterminer $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)$.