Feuille d'exercices 4
Calculs algébriques et sommes

Exercice 1 ●○○ — Majorer une somme

Soit n un entier non nul, écrire la somme

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

avec le symbole Σ, puis montrer qu'ellle est inférieure à 1.

Correction :

Méthode : Il est naturel de majorer chaque terme de la somme par le plus grand d'entre eux. Il faut aussi se demander tout de suite "combien y a-t-il de termes dans la somme" ?

Détails : On a

$$S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Or chaque terme est inférieur au plus grand d'entre eux, qui est $\frac{1}{n+1}$:

$$\forall k \, [\![n+1\,, 2n]\!]\,, \quad \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

D'où en sommant les inégalités :

$$S_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1} = \frac{2n-(n+1)+1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

où on a utilisé que le nombre d'entiers entre $n+1$ et $2n$ est $2n-(n+1)+1$.

A retenir : Si a et b sont deux entiers, le nombres d'entiers dans $[\![a\,, b]\!]$ est $b-a+1$. De plus, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante, alors

$$\sum_{k=a}^{b} \lambda = \lambda(b-a+1).$$

N'apprenez par coeur ces formules mais refaites ces raisonnements qui sont simples.

Exercice 2 ●○○ — Repérer des téléscopages

1. Trouver deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,-3\}, \quad \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3}.$$

En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$.

2. En faisant apparaître $k+1$ au numérateur, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

Correction :

Méthode :

1.
2. On rappelle que $(k+1)! = (k+1)k!$.On voudrait avoir $k+1$ au numérateur, pour simplifier. Or k n'est pas loin de $k+1$ (utiliser un balayeur).

Détails :

1.
2. La technique du "balayeur" donne

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}.$$

Le terme général est maintenant une différence de termes consécutifs : on est prêt pour le télescopage ! On a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!},$$

après télescopage, et en utilisant que $0! = 1$.

Exercice 3 ●●○ — Calcul d'une somme avec un glissement

Soit n un entier non nul, On cherche à calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$.

1. En effectuant un glissement d'indice, exprimer S_n comme somme de deux sommes.
2. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k2^k$ en fonction de S_n et conclure.

Correction :

Méthode :

1. En lisant la question suivante, il est naturel d'essayer le glissement d'indice $p = k-1$.
2. Jouer au jeu des 7 erreurs en ajoutant et en enlevant ce qu'il manque (termes “de bord” de la somme).

Détails :

1. On effectue le glissement d'indice $p = k - 1$, qui donne
$$S_n = \sum_{p=0}^{n-1}(p+1)2^{p+1} = 2\sum_{p=0}^{n-1} p2^p + 2\sum_{p=0}^{n-1} 2^p$$
2. On a (notez que le terme correspondant à $k = 0$ est nul) :
$$\sum_{k=0}^{n-1} k2^k = \sum_{k=1}^{n} k2^k \underbrace{-n2^n}_{\text{terme } k=n}$$
ce qui donne
$$\sum_{k=0}^{n-1} k2^k = S_n - n2^n.$$
La **Q1** donne alors (l'indice p est muet) :
$$S_n = 2(S_n - n2^n) + 2\sum_{p=0}^{n-1} 2^p.$$
On calcule cette dernière somme, somme des termes d'une suite géométriques :
$$\sum_{p=0}^{n-1} 2^p = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$$
et donc
$$S_n = 2S_n - n2^{n+1} + 2(2^n - 1) \iff S_n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$
On vérifie que la formule fonctionne lorsque $n = 1$ et $n = 2$.

A retenir : La somme des termes d'une suite géométrique est donnée par
$$\sum_{k=m}^{n} q^k = \underbrace{q^m}_{\text{premier terme}} \times \frac{1-q^{\overbrace{n-m+1}^{\text{nb de termes}}}}{1-q}.$$
Dans la formule, on interprète q^m comme le premier terme et $n-m+1$ comme le nombre de termes dans la somme. La formue est particulièrement incontournable pour $m = 0$ (“la somme part de 1").

Exercice 4 ●●○ Une quantité importante

Calculer pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ la somme $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}$.

Exercice 5 ●●○ Une autre somme de sinusoïdes

Calculer pour $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ les sommes
$$C_n(a,b) = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+bk) \quad \text{et} \quad S_n(a,b) = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+bk)$$

Correction :

Méthode :

Plutôt qu'une formule d'addition, le mieux est d'utiliser le cours : pour calculer une somme de cosinus, on passe par des exponentielles complexes. Ici on peut former $C_n(a,b) + iS_n(a,b)$.

Détails :

On a
$$C_n(a,b)+iS_n(a,b) = \sum_{k=1}^{n}(\cos(a+bk)+i\sin(a+bk)) = \sum_{k=1}^{n} e^{i(a+bk)} = \sum_{k=1}^{n} e^{ia}e^{ibk} = e^{ia}\sum_{k=1}^{n} e^{ibk}$$
On calcule cette dernière somme, qui est une somme géométrique :
$$\sum_{k=1}^{n} e^{ibk} = \sum_{k=1}^{n}(e^{ib})^k = e^{ib}\frac{1-(e^{ib})^n}{1-e^{ib}} = e^{ib}\frac{1-e^{inb}}{1-e^{ib}}.$$
Il reste à calculer la partie réelle de cette quantité. On utilise la technique de l'angle moitié pour factoriser des exponentielles complexes :
$$\begin{aligned} C_n(a,b) + iS_n(a,b) &= e^{i(a+b)} \times \frac{e^{i\frac{nb}{2}}}{e^{i\frac{b}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{nb}{2}} - e^{i\frac{nb}{2}}}{e^{-i\frac{b}{2}} - e^{i\frac{b}{2}}} \\ &= e^{i(a+b)} \times e^{i(n-1)\frac{b}{2}}\frac{\sin\frac{nb}{2}}{\sin\frac{b}{2}} = e^{i(a+(n+1)\frac{b}{2})}\frac{\sin\frac{nb}{2}}{\sin\frac{b}{2}}. \end{aligned}$$
On conclut en prenant les parties réelles et imaginaires :
$$C_n(a,b) = \cos\left(a+(n+1)\frac{b}{2})\right)\frac{\sin\frac{nb}{2}}{\sin\frac{b}{2}} \quad \text{et} \quad S_n(a,b) = \sin\left(a+(n+1)\frac{b}{2})\right)\frac{\sin\frac{nb}{2}}{\sin\frac{b}{2}}$$
Ces formes factorisées sont les meilleures car on peut y lire les annulations de ces quantités.

A retenir :

Ce calcul est technique et peut faire peur mais il est standard. Les étapes clefs en sont :

- Passer par des exponentielles complexes...
- Afin de reconnaître une somme géométrique que l'on calcule.
- Utiliser la technique de l'angle moitié pour faire apparaître des quantités réelles.
- Récupérer les parties réelles et imaginaires.

Pour aller plus loin :
Ces calculs sont très utiles quand on calcule des superpositions d'onde monochromatiques. Savoir quand ces sommes s'annulent permet de savoir où sont les "tâches" que l'on peut alors observer. Ces calculs sont aussi centraux dans la théorie des séries de Fourier qui permet de décomposer n'importe quel signal en somme de sinusoïdes.

Exercice 6 ●●○ Sommes doubles

Soit n un entier non nul, calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$,
2. $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$

Correction :
Méthode :

1. On écrit qu'il s'agit d'une somme de sommes, avec l'indice i qui évolue entre 1 et j (et ce pour j entre 1 et n).
2. Pour dire ce que vaut $\min(i,j)$, on distingue selon que $i<j$ ou $i>j$ ou $i=j$.

Détails :

1. Notons S_n la somme à calculer, on a
$$S_n=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} ij\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j} i\right)$$
où on a pu sortir j de la deuxième somme car j y est vu comme constant. Or on a pour $j\in\mathbb{N}^*$ fixé :
$$\sum_{i=1}^{j} i=\frac{j(j+1)}{2}.$$
Ainsi :
$$S_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2(j+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^3+\sum_{j=1}^{n} j^2\right)=\frac{1}{2}((\frac{n(n+1)}{2})^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}).$$
Après calculs (erreurs possibles, factoriser par $n(n+1)$) :
$$S_n=\frac{1}{24}(n(n+1)(3n+1)(n+2))$$
2. On note S_n la somme recherchée. On sépare les indices doubles (i,j) en trois sous-ensembles, comme suggéré dans la méthode :
$$S_n=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} j+\sum_{1\leqslant i\leqslant n} i.$$
Ces trois sous-ensembles peuvent être vus commes les cases au dessus, égales, ou en dessous de la diagonale d'un carré, cases indexées par i (ligne) et j (colonne).
La première somme se calcule comme à l'exercice d'avant (avec une petit subtilité car l'inégalité est stricte) :
$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i&=\sum_{j=2}^{n}(\sum_{i=1}^{j-1} i)=\sum_{j=2}^{n}\frac{(j-1)j}{2}=\frac{1}{2}(\sum_{j=2}^{n} j^2-\sum_{j=2}^{n} j)\\&=\frac{1}{2}(\sum_{j=2}^{n} j^2-\sum_{j=2}^{n} j)=\frac{1}{2}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1-(\frac{n(n+1)}{2}-1))\\&=\frac{n(n+1)}{4}(\frac{2n+1}{3}-1)=\frac{1}{6}(n(n+1)(n-1))\end{aligned}$$
Pour de raisons de symétrie, la deuxième somme vaut la même chose, ainsi on a
$$S_n=2\times\frac{1}{6}(n(n+1)(n-1))+\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)(\frac{1}{3}(n-1)+\frac{1}{2})=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 7 ●●○ Deuxième calcul, avec un somme double

On va retrouver la valeur de S_n, défini dans l'exercice 3 :

1. Posons $T_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 2^i$. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ T_n=S_n$.
2. Intervertir la somme double et conclure.

Correction :
Méthode :

1. La deuxième somme consiste à sommer des constantes.
2. Pour intervertir facilement, écire que la somme est faite sur les indices vérifiant $1\leqslant j\leqslant i\leqslant n$. Ainsi, i va de j à n, et ce pour chaque valeur de $j\in[\![1\,,n]\!]$.

Détails :

1. Pour $i\in\mathbb{N}^*$ fixé, on a
$$\sum_{j=1}^{i} 2^i=i\times 2^i.$$
Ainsi, on a bien $S_n=T_n$.

2. On intervertit la somme double, en suivant la méthode :

$$T_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} 2^i.$$

Or, pour j, fixé, on a par somme d'une suite géométrique :

$$\sum_{i=j}^{n} 2^i = 2^j \frac{1-2^{n-j+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 2^j.$$

Ainsi,

$$T_n = \sum_{j=1}^{n}(2^{n+1} - 2^j) = n2^{n+1} - 2 \times \frac{1-2^n}{1-2} = (n-1)2^{n+1} + 2$$

Exercice 8 ●●○ Un polynôme

Soit n un entier non nul, on définit la fonction P_n sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{x}{k})$$

1. Donner P_1 et P_2.

2. Montrer que P_n est un polynôme dont on donnera le degré.

3. Que valent $P_n(0)$, $P_n(1)$ et $P_n(-n)$?

4. Montrer que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1).$$

5. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P_n(q)$.

Exercice 9 ●●●

1. Soit n un entier non nul, et k un entier compris entre 1 et n. Montrer que

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n}\binom{n}{k} \quad \text{(Formule comité-président).}$$

Retrouver $\sum_{p=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

2. En s'inspirant du cours, introduire la fonction $f(x) = (x+1)^n$ et calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}.$$

Correction :
Méthode :
Détails :

1. On a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\times(n-1)!}{k\times(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1},$$

ce qui donne la formule. On déduit

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}.$$

Cette dernière somme se calcule par glissement d'indice :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = \sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p} = 2^{n-1}.$$

On déduit le résultat demandé.

2. On peut itérer la formule comité président. La méthode du cours consiste plutôt à introduire

$$f(x) = (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k,$$

que l'on manipulera avant de l'évaluer en $x = 1$. Ainsi, en primitivant des deux côtés cette égalité :

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}x^{k+1}.$$

On évalue en $x = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}}{n+1}.$$

De même, pour faire apparaître $k^2\binom{n}{k}$, on dérive deux fois :

$$\forall n \geqslant 2, \quad f''(x) = n(n-1)(x+1)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^{k-2}$$

On évalue en $x = 1$:

$$n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

On conclut en utilisant **Q1** :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n2^{n-2}(n-1+2) = n(n+1)2^{n-1}.$$

Notez que la formule fonctionne aussi pour $n = 0$ et $n = 1$.

Exercice 10 ●●●

1. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall p \in [\![0, n]\!], \quad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

2. En évaluant cela pour des p bien choisis, retrouver

$$\sum_{k=0}^{n} k, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^3.$$

Correction :

Méthode :

1. La difficulté est qu'il y a trois indices : n, l'entier sur lequel porte la récurrence. A n fixé, on doit montrer la formule pour plusieurs valeurs de p. Et l'indice de sommation k qui est muet. Tout quantifier permet de s'y retrouver.

2. Il est bon de savoir ce que valent $\binom{k}{1}$, $\binom{k}{2}$ voire $\binom{k}{3}$ pour cette question.

Détails :

1. Montrons la propriété :

$$\mathcal{P}_n : \quad \forall p \in [\![0, n]\!], \quad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Initialiation. Si $n = 0$, alors $p = 0$, et on a

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{k}{0} = \binom{0}{0} = 1 = \binom{1}{1},$$

d'où $\mathcal{P}_0$ qui est vérifiée.

- Hérédité. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Afin de prouver $\mathcal{P}_{n+1}$, on se donne $p \in [\![0, n+1]\!]$. Si $p = n+1$, on n'a rien à faire puisque :

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{n+2}{n+2}.$$

Si $p \in [\![0, n]\!]$, c'est là qu'on va utiliser $\mathcal{P}_n$. On écrit :

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} \underbrace{= \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p}}_{\text{on détache le dernier terme}} \underbrace{= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p}}_{\text{d'après } \mathcal{P}_n} \underbrace{= \binom{n+2}{p+1}}_{\text{par le triangle de Pascal}}.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

On conclut par principe de récurrence.

2. Pour $p = 1$, on a $\binom{k}{1} = k$, et la formule précédente devient :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

On retrouve la formule du cours.

On continue sur cette idée : lorsque $p = 2$, on a $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(k^2 - k)$, et donc avec la formule

$$\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} (k^2 - k) = \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}.$$

En rajoutant le premier terme manquant ($k = 1$) qui vaut $1^2 - 1 = 0$:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (k^2 - k) = \frac{(n+1)n(n-1)}{6},$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On procède de même avec $p = 3$.

Exercice 11 ●●○ Troisème calcul, avec un paramètre

Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit f la fonction défnie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. En calculant f' de deux manière différentes, déterminer $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

2. Retrouver la somme S_n de l'exercice 3.

3. Comment calculeriez-vous $\sum_{k=1}^{n} k(k-1)x^{k-2}$ puis $\sum_{k=1}^{n} k^2 2^k$?

Exercice 12 ●●○ — Linéariser pour intégrer

Donner une primitive de $\sin^5 x$ et de $\sin^4 x \cos x$.

Exercice 13 ●●○ — De nouvelles valeurs particulières

Montrer que $\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$. En déduire $\cos(\frac{\pi}{8})$ puis $\sin(\frac{\pi}{8})$.

Correction :
Méthode :
Détails :
Une première piste serait décrire $\cos(4x) = \cos(2 \times 2 \times x)$ et d'utiliser deux formules de duplication. Nous préférons utiliser le cours sur la “délinéaristion” : on commence par la formule de Moivre :

$$\cos(4x) = \mathrm{Re}(e^{4ix}) = \mathrm{Re}((\cos x + i \sin x)^4).$$

Or le binôme de newton fournit :

$$(\cos x + i \sin x)^4 = \cos^4 x + 4i \cos^3 x \sin x - 6\cos^2 x \sin^2 x - 6i \cos x \sin^3 x + \sin^4 x.$$

Ainsi, en prenant la partie réelle :

$$\cos(4x) = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x.$$

Pour n'avoir que du cosinus, on exploite $\cos^2 + \sin^2 = 1$:

$$\cos(4x) = \cos^4 x - 6\cos^2 x(1 - \cos^2 x) + (1 - \cos^2 x)^2.$$

En développant, on obtient

$$\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$$

On évalue alors en $x = \frac{\pi}{8}$: cela donne

$$\cos(\frac{\pi}{2}) = 8\cos^4(\frac{\pi}{8}) - 8\cos^2(\frac{\pi}{8}) + 1.$$

En notant $z = \cos\frac{\pi}{8}$, on déduit que ce nombre vérifie l'équation

$$8z^4 - 8z^2 + 1 = 0.$$

Puisqu'il n'y a que des termes pairs, on pose (c'est classique) : $X = z^2$. Alors X est solution de

$$8X^2 - 8X + 1 = 0.$$

Les solutions de cette équation sont (calculs laissés à l'élève) :

$$X_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Ainsi, $z = \cos(\frac{\pi}{8})$ vérifie

$$z^2 = X_1 \quad \text{ou} \quad z^2 = X_2,$$

et puisque $X_1 > 0$ et $X_2 > 0$, on a quatre valeurs possible pour z :

$$z = \sqrt{X_1} \quad \text{ou} \quad z = -\sqrt{X_1} \quad \text{ou} \quad z = \sqrt{X_2} \quad \text{ou} \quad z = -\sqrt{X_2}.$$

A ce stade, la stratégie suivie ne peut pas dire laquelle de ces quatre valeurs est la bonne, il faut raisonner sur z pour choisir. Puisque $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{4}$, par stricte décroissance du cosinus sur $[0, \frac{\pi}{4}]$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < z < 1.$$

En particulier, $z > 0$, ce qui exclut $-\sqrt{X_1}$ et $-\sqrt{X_2}$. De plus, $X_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{1}{2}$, donc $\sqrt{X_2} < \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui exclut $\sqrt{X_1}$. Finalement,

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{X_2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

On déduit $\sin\frac{\pi}{8}$: on a

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Ainsi,

$$\sin\frac{\pi}{8} = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

et comme ci-dessus, puisque $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, on déduit

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

A retenir : L'**analyse** conduit à résoudre $8z^4 - 8z^2 + 1 = 0$. Cette partie, purement calculatoire, ne nécessite que quelques techniques du cours. Distinguer laquelle des solutions possibles est la bonne, la **synthèse**, parait laborieuse, mais elle demande une bonne logique, et sans cette partie, votre solution ne vaudra pas grand chose. Par ailleurs, les raisonnements sont assez élémentaires et se suivent bien avec un cercle trigo.

Exercice 14 ●●● De nouvelles valeurs particulières, bis

1. Montrer que $\sin(5x) = P(\sin x)$, où P est défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$.
2. Montrer que $\sin(\frac{\pi}{10})$ est solution de l'équation $P(x) = 1$, puis de l'équation
$$16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0.$$
3. Trouver deux réels a et b tels que $16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 16(x-a)^2(x-b)^2$.
4. Donner la valeur de $\sin(\frac{\pi}{10})$.

Exercice 15 ●●○ Une équation trigonométrique

1. Factoriser le polynôme $x \mapsto 4x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ (noter que $x = \frac{1}{2}$ est racine).
2. Résoudre l'équation $\cos(3x) = 2\cos(2x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.