Feuille d'exercices 5
Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1 ●○○ — Trouver les racines carrées

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 = -5$ **2.** $z^2 = 7 - 24i$ **3.** $z^2 = 8e^{i\frac{\pi}{5}}$ **4.** $z^2 = 49 + 28\sqrt{2}i$

Exercice 2 ●○○ — Equations de degré 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 4z + 13 = 0$. **2.** $z^2 + (-7+3i)z + 22 - 14i = 0$.

Correction :

Méthode :

1. Standard.
2. Standard mais on doit calculer des racines d'un nombre complexe.

Détails :

1. On applique les formules du cours. Le discriminant vaut $\Delta = 16 - 4 \times 13 = -36 < 0$. Les solutions sont donc
$$z_1 = \frac{4 - i\sqrt{36}}{2} = 2 - 3i \quad \text{et} \quad z_1 = \frac{4 + i\sqrt{36}}{2} = 2 + 3i.$$
2. On calcule le discriminant :
$$\Delta = (-7+3i)^2 - 4(22-14i) = 49 - 42i - 9 - 88 + 56i = -48 + 14i.$$
On sait que les solutions de l'équations sont données par
$$z_1 = \frac{7 - 3i - \delta}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{7 - 3i + \delta}{2},$$
où $\delta \in \mathbb{C}$ est un solution de l'équation $\delta^2 = \Delta = -48 + 14i$, c'est-à-dire une racine complexe de Δ. Il reste à déterminer δ. Comme on ne reconnait pas une forme trigo-expo, on utilise la forme algérique : on cherche δ sous la forme $\delta = x + iy$, on a alors en identifiant les parties réelles et imaginaires, ainsi que le module :
$$\delta^2 = -48+14i \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(\delta^2) = -48 \\ \mathrm{Im}(\delta^2) = 14 \\ |\delta|^2 = |\Delta| \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -48 \\ 2xy = 14 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{48^2 + 14^2} = \sqrt{2500} = 50 \end{cases}.$$
En combinant la première et la troisième équation on obtient :
$$x^2 = 1 \quad \text{et} \quad y^2 = 49 \iff x = \pm 1 \quad \text{et } y = \pm 7.$$
La deuxième équation indique que x et y sont de même signe et donc les solutions sont
$$\delta = 1 + 7i \quad \text{et} \quad \delta = -1 - 7i.$$
Ainsi, en prenant par exemple la première solution, on déduit z_1 et z_2.

Exercice 3 ●●○ — Equations de degré 3, avec une solution imaginaire pure

On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = 0.$$

1. Montrer que l'équation a une solution imaginaire pure.
2. En déduire une factorisation de $z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i$
3. Résoudre l'équation.

Correction :

Méthode :

1. On a besoin de faire des calculs. Poser $z = ix$, avec $x \in \mathbb{R}$, pour transformer l'équation. Identifier parties réelles et imaginaire.
2. Si $P(\alpha) = 0$, on peut écrire
$$P(z) = (z - \alpha)Q(z) \quad \text{avec} \quad Q(z) = az^2 + bz + c.$$

Détails :

1. Cherchons une solution imagnaire sous la forme $z = ix$, avec $x \in \mathbb{R}$. Puisque $i^3 = -i$ et $i^2 = -1$, l'équation devient
$$\begin{aligned} & -ix^3 + (5+3i)x^2 + (7+16i)ix + 3 - 21i = 0 \\ \iff & 5x^2 - 16x + 3 + i(-x^3 + 3x^2 + 7x - 21) = 0 \end{aligned}$$

Puisque $x \in \mathbb{R}$, en utilisant qu'un nombre complexe est nul si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont :

$$-ix^3 + (5+3i)x^2 + (7+16i)ix + 3 - 21i = 0 \iff \begin{cases} 5x^2 - 16x + 3 = 0 \\ -x^3 + 3x^2 + 7x - 21 = 0 \end{cases}.$$

La première équation a pour solutions $\frac{1}{5}$ et 3. On vérifie rapidement que $x = 3$ est aussi solution de la deuxième. AInsi, $z = 3i$ est solution de l'équation d'origine.

2. Introduisons $P(z) = z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i$. D'après la question précédente, $3i$ est racine de P, donc on peut factoriser par $z - 3i$:

$$\exists Q \in \mathbb{C}[X], \quad \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z-3i)Q(z).$$

Il est direct que Q est de degré 2, donc on cherche a, b et c tels que

$$z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = (z-3i)(az^2 + bz + c)$$

En général, on commence par les coefficients "au bord" qui se trouve directement, en développant à droite et en identifiant les termes en z^3 et constant :

$$a = 1 \quad \text{et} \quad -3ic = 3 - 21i \iff c = \frac{3-21i}{-3i} = i(1-7i) = 7 + i.$$

Pour trouver b, on peut développer et identifier les termes en z^2 ou z :

$$(z-3i)(z^2 + bz + 7 + i) = z^3 + (b-3i)z^2 + (7-3ib)z + 3 - 21i,$$

soit en identifiant :

$$-5 - 3i = b - 3i \iff b = -5$$

Finalement,

$$z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = (z-3i)(z^2 - 5z + 7 + i).$$

3. D'après **Q2** :

$$z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = 0 \iff z - 3i = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 - 5z + 7 + i = 0.$$

La deuxième équation a pour solutions, après méthode standard (voir exercice précédent), $2+i$ et $3-i$. Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{3i, 2+i, 3-i\}.$$

A retenir :

La stratégie de la question 1 ne marche que dans des cas très particulier, car une équation peut avoir des solutions ni réelles, ni imaginaires pures !

Si un polynôme P admet une racine $\alpha \in \mathbb{C}$ (c'est-à-dire que $P(\alpha) = 0$), alors on peut le factoriser par $X - \alpha$, c'est-à-dire écrire

$$P(X) = (X - \alpha)Q(X) \quad \text{avec } Q \text{ un polynôme.}$$

Nous reverrons cela, et nous aurons des stratégies pour calculer Q, au chapitre "Polynômes".

Exercice 4 ●○○ — Equation bicarrée

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 - z + 1 = 0, \quad \text{puis} \quad z^4 - z^2 + 1 = 0.$$

Exercice 5 ●○○

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 + 1 = 0$. Représenter les solutions dans le plan complexe.

Correction :

Méthode :

On écrit naturellement $z^6 = -1$ et applique le cours sur les racines n-ièmes. Ici le second membre peut être mis sous forme exponentielle facilement :

$$z^6 = -1 \iff z^6 = e^{i\pi}.$$

On déduit facilement une solution particulière : $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}$. On a alors

$$z^6 = e^{i\pi} \iff z^6 = z_0^6 \iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^6 = 1.$$

A ce stade, on ne peut pas continuer si on ne connait pas les racines de l'unité :

$$\mathbb{U}_6 = \{e^{\frac{2ik\pi}{6}},\ k = 0, \dots, 5\} = \{1, e^{\frac{2i\pi}{6}}, e^{\frac{4i\pi}{6}}, -1, e^{\frac{8i\pi}{6}}, e^{\frac{10i\pi}{6}}\}$$

Détails :

On écrit naturellement $z^6 = -1$ et applique le cours sur les racines n-ièmes. Ici le second membre peut être mis sous forme exponentielle facilement :

$$z^6 = -1 \iff z^6 = e^{i\pi}.$$

On déduit facilement une solution particulière : $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}$. On a alors

$$z^6 = e^{i\pi} \iff z^6 = z_0^6 \iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^6 = 1.$$

A ce stade, on ne peut pas continuer si on ne connait pas les racines de l'unité :

$$\mathbb{U}_6 = \{e^{\frac{2ik\pi}{6}},\ k = 0, \dots, 5\} = \{1, e^{\frac{2i\pi}{6}}, e^{\frac{4i\pi}{6}}, e^{\frac{6i\pi}{6}}, e^{\frac{8i\pi}{6}}, e^{\frac{10i\pi}{6}}\}$$

Les solutions s'obtiennent en disant que

$$\frac{z}{z_0} \in \{1, e^{\frac{2i\pi}{6}}, e^{\frac{4i\pi}{6}}, e^{\frac{6i\pi}{6}}, e^{\frac{8i\pi}{6}}, e^{\frac{10i\pi}{6}}\} \iff z \in \{z_0, z_0e^{\frac{2i\pi}{6}}, z_0e^{\frac{4i\pi}{6}}, z_0e^{\frac{6i\pi}{6}}, z_0e^{\frac{8i\pi}{6}}, z_0e^{\frac{10i\pi}{6}}\}.$$

On met ces solutions sous une forme lisible :

$$\mathcal{S} = \{e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{3i\pi}{6}}, e^{\frac{5i\pi}{6}}, e^{\frac{7i\pi}{6}}, e^{\frac{9i\pi}{6}}, e^{\frac{11i\pi}{6}}\}.$$

A retenir :
On rappelle la méthode du cours pour résoudre une équation de la forme

$$z^n = a$$

avec $a \in \mathbb{C}$.

1. On met le second membre sous forme exponentielle : $a = re^{i\theta}$ et on déduit une solution particulière : $z_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}}$. Notez qu'écrire $r^{\frac{1}{n}}$ est licite car $r > 0$ mais est strictement interdit pour autre chose que des réels positifs.
2. On décrit les solutions de $Z^n = 1$, à savoir les racines n-ièmes de l'unité : il s'agit de l'ensemble $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k = 0, \dots, n-1\}$. Si on a oublié la formule pour les racines de l'unité, on la retrouve en cherchant des solutions sous la forme $e^{i\varphi}$, ce qui conduit à $n\varphi \equiv 0 \ \ [2\pi]$ et donc $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$.
3. On conclut en multipliant ces racines de l'unité par z_0 : en effet l'équation est $z^n = z_0^n$, donc $\frac{z}{z_0}$ est une de ces racines de l'unité.

Les plus ambitieux peuvent retenir la formule finale : les solutions sont

$$\{r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}},\ k = 0, \dots, n-1\}.$$

Le cours demande de retenir la forme des racines n-ième de l'unité, qui peuvent resurgir dans d'autres problèmes.

Exercice 6 ●●○ — En passant par les racines 4$^{\text{e}}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - (1+z)^4 = 0$.

Correction :
Méthode :
Les puissacnces 4 doivent vous amener à essayer de transformer l'équation pour avoir une seule puissance. diviser par $(1+z)^4$ (ou par z^4) doit être naturel.
Se ramener à $X^4 = 1$ avec $X = \frac{z}{1+z}$ puis revenir aux solutions en exprimant z en fonction de X.
Détails :
Il est clair que $z = -1$ n'est pas solution, donc on peut diviser par $(1+z)^4$:

$$z^4 - (1+z)^4 = 0 \iff \iff \frac{z^4}{(1+z)^4} - 1 = 0 \iff \left(\frac{z}{1+z}\right)^4 = 1.$$

On introduit une nouvelle équation : $X^4 = 1$, d'inconnue $X \in \mathbb{C}$. Elle possède (voir méthode du cours, ou à l'exercice ci-dessus) quatre solutions :

$$\mathcal{S}_0 = \{1, e^{\frac{2i\pi}{4}}, e^{\frac{4i\pi}{4}}, e^{\frac{6i\pi}{4}}\} = \{1, i, -1, -i\}.$$

Il faut faire le lien avec l'équation initiale. Pour chaque $X \in \mathcal{S}_0$ fixé, on résout $\frac{z}{1+z} = X$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: on a

$$\frac{z}{1+z} = X \iff z = X(1+z) \iff z(1-X) = X.$$

A ce stade il y a une vraie subtilité avant d'isoler z, il faut prendre ses précautions avant de diviser.

- Si $X \neq 1$, l'équation $\frac{z}{1+z} = X$ a une unique solution : $z = \frac{X}{1-X}$
- Si $X = 1$, l'équation aboutit à $0 = 1$ et n'a donc pas de solution.

Ainsi, l'équation initiale possède comme solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{i}{1-i}, \frac{-1}{1-(-1)}, \frac{-i}{1-(-i)}\right\} = \{\frac{-1+i}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1-i}{2}\}.$$

Pour aller plus loin :
Si on développe, $z \mapsto z^4 - (1+z)^4$ est un polynôme de degré 3. On verra qu'il est cohérent d'avoir trois racines, dans $\mathbb{C}$.
Lorsqu'on a résolu $\frac{z}{1+z} = X$, on a en fait montré que la fonction $\varphi : z \mapsto \frac{z}{1+z}$ est bijective (ce mot traduit que l'équation $X = \varphi(z)$ d'inconnue z, a une unique solution), avec comme ensemble de définition $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$, et comme ensemble d'arrivée $\mathbb{C}\backslash\{1\}$. Sa fonction réciproque est $X \mapsto \frac{X}{1-X}$. Ces notions seront développées en cours d'année.

Exercice 7 ●●● — En passant par les racines n^{e}

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$.

Exercice 8 ●○○ — Avec des exponentielles

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $e^z = 2$. **2.** $e^z = -2$. **3.** $e^z = e^{8+6i}$. **4.** $e^{2z} = e^{8+6i}$. **5.** $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

Correction :
Méthode :
Bien sûr, il ne suffit pas de prendre le logarithme (ce qui n'a aucun sens car on est dans $\mathbb{C}$). On rappelle que pour $z \in \mathbb{C}$, que l'on écrit $z = x + iy$, l'exponentielle est définie par

$$e^z = e^x \times e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

En particulier,

$$|e^z| = e^x \quad \text{et} \quad \arg(e^z) \equiv y \ \ [2\pi].$$

Ainsi, pour résoudre une équation avec une exponentielle, on cherche l'inconnue sous forme algébrique, et on raisonne sur le module et l'argument du second membre. Donc, il peut être pertinent de mettre ce second membre sous forme exponentielle.
Détails :

1. On cherche z sous la forme $z = x + iy$. On aboutit à
$$e^z = 2 \iff e^x e^{iy} = 2 \iff \begin{cases} e^x = |2| = 2 \\ y \equiv \arg(2) \equiv 0 \quad [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \ln 2 \\ y \equiv 0 \quad [2\pi] \end{cases}.$$
Ainsi, l'ensemble des solutions est
$$\mathcal{S} = \{\ln 2 + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$
2. Notons que -2 a pour forme exponentielle $-2 = 2e^{i\pi}$. On cherche z sous la forme $z = x + iy$. On aboutit à
$$e^z = -2 \iff e^x e^{iy} = 2e^{i\pi} \iff \begin{cases} e^x = 2 \\ y \equiv \pi \quad [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \ln 2 \\ y \equiv \pi \quad [2\pi] \end{cases}.$$
Ainsi, l'ensemble des solutions est
$$\mathcal{S} = \{\ln 2 + 2ik\pi + i\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\ln 2 + (2k+1)i\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$
3. On cherche z sous la forme $z = x + iy$. On aboutit à
$$e^z = e^{6+8i} \iff e^x e^{iy} = e^6 e^{8i} \iff \begin{cases} e^x = |e^6 e^{8i}| = e^6 \\ y \equiv \arg(e^6 e^{8i}) \equiv 8 \quad [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x = 6 \\ y \equiv 8 \quad [2\pi] \end{cases}.$$
Ainsi, l'ensemble des solutions est
$$\mathcal{S} = \{6 + (8 + 2k\pi)i,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$
4. On peut tout refaire en remplaçant z par $2z$, et diviser par 2 (sans oublier le modulo) dans la méthode précédente. On peut aussi utiliser la question précédente et dire (cela revient au même) que :
$$z \text{ solution} \iff 2z \in \{6 + (8 + 2k\pi)i,\ k \in \mathbb{Z}\} \iff z \in \{3 + (4 + k\pi)i,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$
5. Il faut bien sûr commencer par trouver le module et l'argument du second membre. On a
$$|3\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{36} = 6.$$
On peut trouver l'argument de manère standard, mais il est encore plus direct de factoriser par ce module :
$$3\sqrt{3} - 3i = 6(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = 6e^{-\frac{i\pi}{6}}.$$
Revenons à l'équation. On cherche z sous la forme $z = x + iy$. On aboutit à
$$e^z = 6e^{-\frac{i\pi}{6}} \iff e^x e^{iy} = 6e^{-\frac{i\pi}{6}} \iff \begin{cases} e^x = 6 \\ y \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \ln 6 \\ y \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi] \end{cases}.$$
Ainsi, l'ensemble des solutions est
$$\mathcal{S} = \{\ln 6 + (-\frac{\pi}{6} + 2k\pi)i,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exercice 9 ●●● — Utilisation de j

On rappelle que $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ vérifie $j^3 = 1$.

1. Calculer $1 + j + j^2$. Mettre aussi j^2 et $-j^2$ sous forme exponentielles.
2. Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b et c. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
3. En déduire que ABC est équilatéral direct si et seulement si
$$a + bj + cj^2 = 0.$$
4. Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Correction :

Méthode :

1. RAS
2. Classique : on rappelle que le quotient $\frac{c-a}{b-a}$ contient les informations suivantes, via son module et son argument :
$$|\frac{c-a}{b-a}| = \frac{AC}{AB} \quad \text{(distances)} \quad \text{et} \quad \arg(\frac{c-a}{b-a}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad \text{(angles)}.$$
3. Se servir des questions précédentes.
4. La question précédente donne un critère sur une expression de degré 1. Ici on demande un critère impliquant une expression de degré 2. Or on peut être équilatéral direct OU indirect. Il est alors naturel d'utiliser : $x = 0 \text{ ou } y = 0 \iff xy = 0$.

Détails :

1. En passant sous forme algébrique, on vérifie que
$$1 + j + j^2 = 0.$$
Cette identité s'accompagne nécessairement d'un dessin. Il est direct que
$$j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} \quad \text{et} \quad -j^2 = e^{\frac{i\pi}{3}}.$$
2. Classique. Le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si
$$\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |\frac{c-a}{b-a}| = 1 \\ \arg(\frac{c-a}{b-a}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases} \iff \frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$
3. On se sert des questions précédentes, en utilisant que $e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$:
$$\begin{aligned} \frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} &\iff c - a = -(b-a)j^2 \quad \text{car } e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2 \\ &\iff a(-1 - j^2) + bj^2 + c = 0 \\ &\iff aj + bj^2 + c = 0 \quad \text{car} \quad 1 + j + j^2 = 0. \\ &\iff a + bj + cj^2 = 0 \quad \text{en multipliant par } j^2 \text{ et avec } j^3 = 1 \end{aligned}$$

4. En adaptant ce qui précède (on permute les rôles de B et C), on a

$$ABC \text{ equilatéral indirect} \iff a + cj + bj^2 = 0.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} ABC \text{ equilatéral} &\iff a + bj + cj^2 = 0 \text{ ou } a + bj + cj^2 = 0 \\ &\iff (a + bj + cj^2)(a + cj + bj^2) = 0 \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à développer, en utilisant $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.