

Feuille d'exercices 6

Ensembles, logiques et fonctions

— **Exercice 1** ●○○ — **Ensembles en extension** Ecrire les ensembles suivants en extension :

1. L'ensemble des nombres premiers entre 1 et 20.
2. l'ensemble $\{r \in \mathbb{Q} \mid r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq p \leq 4, q \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq q \leq 2p\}$.

— **Exercice 2** ●●○ — **Ensembles en compréhension** Ecrire les ensembles suivants en compréhension :

1. L'ensemble des nombres entiers pairs.
2. Etant données deux points A et B distincts du plan, l'ensemble des points de la droite (AB) (utiliser le vecteur \overrightarrow{AB}).
3. L'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , dérivables et de dérivée continue (c'est-à-dire qui sont dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$), dont la courbe est au dessus de toutes ses tangentes.

— **Exercice 3** ○○○ — **Opérations ensemblistes sur des exemples faciles** Pour chacun des cas suivants, on se donne un ensemble E et des sous-ensembles A et B . Déterminer les ensembles $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\complement_E A$.

1. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$ et $B = \{1, 2, 4, 5\}$.
2. $E = \mathbb{R}$, $A =]3, +\infty[$ et $B = [-4, +\infty[$
3. $E = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{N}$ et $B = \llbracket -3, 2 \rrbracket$ (nombre entiers entre -3 et 2). Ne pas hésiter à mixer les notations par exemple en compréhension.

— **Exercice 4** ●●○ — Des conditions pour l'inclusion

Soit E un ensemble, et A et B deux parties de E .

1. Montrer que $A \cup B = B \iff A \subset B$.
2. Montrer que $A \cap B = B \iff B \subset A$.
3. Montrer que $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$.
4. Soit C un troisième élément de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$(A \setminus B) \setminus (C \setminus B) = A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

— **Exercice 5** ●●○ — **Différence symétrique** Soit E un ensemble, et A et B des parties de E . On appelle différence symétrique de A et de B , l'ensemble $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1. Faire un diagramme.
2. Déterminer $A \Delta A$, $A \Delta \emptyset$ et $A \Delta E$.
3. Montrer que $A \Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

— **Exercice 6** ●●● — **Une équation ensembliste** Dans un ensemble E , A et B étant donnés, on considère l'équation

$$A \cup X = B,$$

d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette équation ait des solutions (on pourra procéder par analyse-synthèse).
2. Faire de même avec l'équation $A \cap X = B$ (un peu plus dur).

— **Exercice 7** ●●○ — **Produit cartésien dans le plan**

1. Dessiner les sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^2 , et dire s'ils peuvent s'écrire comme un produit cartésien de deux ensembles de \mathbb{R} (on essaiera de faire une démonstration lorsque ce n'est pas le cas).
 - a. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 < x < 3 \text{ et } 2 \leq y < 3\}$.
 - b. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2 \leq x < 4 \text{ et } y = 3\}$.
 - c. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2 \leq x < 4 \text{ et } y = 3x + 1\}$.
 - d. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
2. Soient p_1 et p_2 les deux fonctions définies de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par $p_1(x, y) = x$, et $p_2(x, y) = y$.
 - a. Déterminer les images (images "ensemblistes") par p_1 et p_2 de chacun des ensembles de la question précédente.
 - b. Soient a et b deux réels avec $a < b$. Déterminer et représenter les images réciproques $p_1^{-1}(\{a\})$ et $p_2^{-1}([a, b])$.
 - c. Les applications p_1 et p_2 sont-elles injectives ? surjectives ?

— **Exercice 8 ●●** — **Composée n^e** Soient $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définies par $g(x) = x + 1$, et $h : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = \frac{x}{x+2}$.

Pour un ensemble E et une fonction $f : E \rightarrow E$, et un entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la composée n^e

$$f^n = f \circ \dots \circ f,$$

avec la convention que $f^0 = \text{Id}_E$. Cette définition est faite par récurrence.

- Déterminer g^n .
- Peut-on définir $h \circ h$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$?
- On note h_0 la restriction de h à $[-1, +\infty[$. Montrer que l'on peut définir $h_0 \circ h_0$, puis h_0^n .
- Calculer h_0^n .

— **Exercice 9 ●○○** — **Injective ou surjectives ?** Dire si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives :

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = |x| + |x + 1|$.
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^3, 2y - 1)$.
- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(z) = |z|$.

— **Exercice 10 ●○○** — **Avec l'inversion** Soit la fonction $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

- Dire si f est injective, surjective, bijective.
- Déterminer l'image $f(\mathbb{R}_+^*)$.
- Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.
- On note $i\mathbb{R}$ la droite des complexes de partie réelle nulle. Déterminer $f^{-1}(i\mathbb{R})$.

— **Exercice 11 ●○○** — **Avec les chiffres des nombres**

- On considère la fonction $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui à un entier associe la somme de ses chiffres.
 - Dire si S est injective, surjective, bijective.
 - Déterminer la valeur maximale de $a \in \mathbb{N}$ tel que la restriction de S à $[[32, a]]$ soit une injection.
- On considère la fonction $D : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui à un entier associe son dernier chiffre.
 - Dire si D est injective, surjective, bijective.
 - Donner l'image de D . Proposer une restriction de D qui soit une bijection sur cette image.

— **Exercice 12 ●○○** — **Image d'une intersection** On a vu dans le cours que si E et F sont deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une fonction, alors pour toutes parties A et B de E , on a

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

- On suppose de plus que f est injective. Montrer qu'alors pour toutes parties A et B de E , on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
- On suppose maintenant que f n'est pas injective. Exhiber A et B tels que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
- Qu'avons nous démontré ?

— **Exercice 13 ●○○** — **Composées et bijections**

Soient E, F et G trois ensembles, ainsi que $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux fonctions. Le cours nous dit que si f et g sont bijectives, alors $g \circ f : E \rightarrow G$ aussi. On va étudier des propriétés de réciproques.

- On suppose $g \circ f$ injective. Montrer que f est injective.
 - On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que g est surjective.
 - On étudie le cas particulier de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $f(x) = (x, 0)$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $g(x, y) = x$. Que dire de $g \circ f$, g et f ? Conclure.
- Soit H un quatrième ensemble, ainsi que $h : G \rightarrow H$ une troisième fonction. Montrer que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si et seulement si f, g et h le sont.

— **Exercice 14 ●○○** — **Prolonger une fonction** Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

- Justifier que f est continue.
- Montrer que f admet un prolongement continue sur \mathbb{R} .

— **Exercice 15 ●●●** — **Une inégalité pour contrôler les accroissements.** Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

- Etudier les variations de $x \mapsto e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$, puis montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

- Montrer également que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.
- On considère la fonction $g : x \mapsto e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \alpha x^3$ avec $\alpha > \frac{e}{6}$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $g(x) \leq 0$.

4. En déduire que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \alpha|x|^3.$$

5. Montrer que f admet un prolongement continue sur \mathbb{R} , qui est de plus dérivable.