Feuille d'exercices 7
Fonctions usuelles

Exercice 1 ●○○ — Maîtriser les puissances

Résoudre les (in)équations suivantes (on prendra bien soin au domaine de validité des quantités en jeu) :

1. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{x}$ **2.** $x^{\sqrt{2}/x} = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$. **3.** $e^{\ln|x|} \geqslant e^{|\ln x|}$ **4.** $x^{\ln x} \leqslant x$. **5.** $3^x < 9^x - 1$.

Exercice 2 ●●○

1. Donner le domaine de définition $A \subset \mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = 10(x-1)^{x-1}(3-x)^{3-x}$.
2. Montrer que le graphe de la fonction possède des symétries que l'on précisera.
3. Démontrer que pour tout $x \in A$, on a $10 \leqslant f(x)$.

Exercice 3 ●●○ — Des puissances d'entiers

Pour quelles valeurs $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ a-t-on $n^p = p^n$? On pourra chercher à faire intervenir la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

Exercice 4 ●●○ — La tangente hyperbolique

Soit la fonction $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\operatorname{th}(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$. Etudier cette fonction.

Exercice 5 ●○○

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes (on pourra poser $X = e^x$) :

1. $\operatorname{ch} x = \sqrt{5}$. **2.** $\operatorname{sh} x = \sqrt{35}$. **3.** $\operatorname{ch} x < \sqrt{26}$.

Exercice 6 ●○○ — Formules hyperboliques (non exigibles)

Montrer les formules suivantes (on pourra ne pas s'attaquer à toutes, et s'assurer qu'on a compris le mécanisme) :

1. (Addition et duplication) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a :
   - **(i)** $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ et $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.
   - **(ii)** $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x)$.
   - **(iii)** $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$ et $\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$
   - **(iv)** $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.
2. (Conversion produit-somme) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a :
   - **(i)** $\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y))$.
   - **(ii)** $\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y))$.
   - **(iii)** $\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y))$.
3. (Conversion somme-produit) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a :
   - **(i)** $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = 2\operatorname{ch}(\frac{x+y}{2})\operatorname{ch}(\frac{x-y}{2})$.
   - **(ii)** $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{ch}(y) = 2\operatorname{sh}(\frac{x+y}{2})\operatorname{sh}(\frac{x-y}{2})$.
   - **(iii)** $\operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = 2\operatorname{sh}(\frac{x+y}{2})\operatorname{ch}(\frac{x-y}{2})$.
   - **(iv)** $\operatorname{sh}(x) - \operatorname{sh}(y) = 2\operatorname{ch}(\frac{x+y}{2})\operatorname{sh}(\frac{x-y}{2})$.

Ces formules ne sont pas à apprendre par coeur.

Exercice 7 ●○○ — Linéarisation hyperbolique

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(4x) = 8\operatorname{ch}^4 x - 8\operatorname{ch}^2 x + 1$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}^5 x = \frac{1}{16}\operatorname{sh}(5x) - \frac{5}{16}\operatorname{sh}(3x) + \frac{10}{16}\operatorname{sh} x$.
3. Donner une primitive de $x \mapsto \operatorname{sh}^5 x$.

Exercice 8 ●●○ — Souvenez-vous pour les sommes trigonométriques

Soit $n \in \mathbb{N}$, ainsi que a et b deux réels. Calculer

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a + kb) \quad \text{et} \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a + kb).$$

Exercice 9 ●●● — Paramétrage et déphasage hyperbolique

On se donne $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que le système
$$\begin{cases} \operatorname{ch}(y) = a \\ \operatorname{sh}(y) = b \end{cases}$$
d'inconnue $y \in \mathbb{R}$ ait une solution, puis le résoudre.
2. On suppose que (a,b) vérifie $a > 0$ et $a^2 > b^2$. Montrer que :
$$\exists \varphi \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{ch}(x + \varphi).$$
3. On suppose que $a < 0$ et $a^2 > b^2$. En déduire que :
$$\exists \varphi \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = -\sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{ch}(x + \varphi).$$
4. Etablir des résultats similaires pour $x \mapsto a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x$ lorsque $b^2 > a^2$ (on permutera intelligement les rôles des paramètres).

Exercice 10 ●○○ **Revenir aux définition** Simplifier les quantités suivantes :

1. $\operatorname{Arccos}(\cos \frac{7\pi}{6})$. **2.** $\operatorname{Arccos}(-\sin \frac{\pi}{6})$. **3.** $\operatorname{Arcsin}(\cos \frac{11\pi}{4})$.
4. $\sin(\operatorname{Arccos} x)$ avec $x \in [-1,1]$. **5.** $\operatorname{Arcsin}(\cos x)$ avec $x \in [\pi, 2\pi]$.

Exercice 11 ●●○ **Etudier une fonctions** Etudier la fonction $f(x) = \operatorname{Arcsin} \frac{1+x}{1-x}$: domaine de définition, et de dérivabilité, variations, représentation graphique, et plus si affinités.

Exercice 12 ●○○ **En étudiant les fonctions** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\operatorname{Arctan}(x) \geqslant \frac{x}{1+x^2}$.

Exercice 13 ●●● Raisonnements et formules

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
$$\operatorname{Arctan} \frac{n}{n+1} + \operatorname{Arctan} \frac{n+1}{n+2} = \operatorname{Arctan} \alpha,$$
puis exprimer α en fonction de n. Appliquer avec $n = 3$.

Exercice 14 ●●○ Formules et raisonnements

Résoudre par analyse-synthèse les équations suivantes :

1. $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin}(x^2 + x - 1) = \frac{\pi}{2}$. **2.** $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin} \frac{4}{5} + \operatorname{Arcsin} \frac{5}{13}$.

Exercice 15 ●●○ Si on peut éviter de dériver...

Soit la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} x^3$.

1. Donner son domaine de définition, et ses variations. Montrer que c'est une bijection (on précisera avec soin le domaine d'arrivée).
2. Dériver la fonction.
3. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{3\pi}{4}$, puis résoudre cette équation.

Exercice 16 ●●● Formules de type Euler, Machin et autres

On démontre des formules qui relient le nombre π à l'arctangente de fractions. Celles-ci ont été utiles pour approcher π, car on a des méthodes pour approcher l'arctangente d'un nombre (surtout s'il est petit).

1. Montrer que
- **a.** $\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.
- **b.** $2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$.
- **c.** $2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$.

2. Il est possible de retrouver ces formules en introduisant les nombres complexes qui vont bien. Par exemple, soient $z_1 = 3 + i$ et $z_2 = 7 + i$. En calculant un argument de $z_1^2 z_2$ de deux manières différentes, retrouver la troisième formule.

3.
- **a.** Pour $x \in [0, \frac{\pi}{8}[$, exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan x$.
- **b.** Montrer que $4 \operatorname{Arctan}(\frac{1}{5}) = \operatorname{Arctan} \frac{120}{119}$.
- **c.** En déduire
$$4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$
Introduire des nombres complexes z_1 et z_2 pour une preuve moins calculatoire, similaire à la question 2.
- **d.** En utilisant un développement limité de Arctan en 0,proposer une approximation de π.

Exercice 17 ●●○ Simplifier une somme

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(n)$.
2. Simplifier la somme
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right)$$
et étudier sa limite lorsque $n \to +\infty$.