Feuille d'exercices 9
Limites et continuités

Exercice 1 ●○○ **Vrai ou faux ?** Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en citant le cours ou en exhibant un contre-exemple :

1. Si une fonction admet une limite en un point, alors elle est définie en ce point.
2. Si une fonction admet des limites à gauche et à droite en un point, et que ces limites sont égales, alors elle admet une limite en ce point.
3. Si une fonction est bornée, alors elle admet une limite en $+\infty$.
4. Si une fonction est non bonée au voisinage de $+\infty$, alors elle tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
5. Si une fonction a sa courbe au dessus de celle de la fonction carré, alors elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
6. Si une fonction paire tend vers une limite en $+\infty$, alors elle tend vers la même limite en $-\infty$.
7. Si une fonction est strictement positive, alors elle ne peut pas tendre vers 0 en $+\infty$.
8. Si une fonction est strictement croissante, alors elle tend vers $+\infty$.
9. Si une fonction tend vers $+\infty$ en $+\infty$, alors elle est croissante.
10. Si une fonction strictement positive tend vers 0 en $+\infty$, alors elle est décroissante à partir d'une certaine abscisse.

Exercice 2 ●○○ **Limites epsilonesque** Déterminer les limites des fonctions suivantes, en utilisant les quantificateurs :

1. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ en 0. **2.** $x \mapsto \ln(e^x+1)$ en $+\infty$, puis en $-\infty$.
3. $x \mapsto \frac{2x+1}{x+3}$ en $+\infty$ **4.** $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ en 0^+ puis en 0^-.

Exercice 3 ●○○ **Encadrer (ou pas)** Trouver (si elles existent) les limites des fonctions suivantes en $+\infty$:

1. $x \mapsto \frac{\lfloor x\rfloor}{x}$. **2.** $x \mapsto x\lfloor \frac{1}{x}\rfloor$. **3.** $x \mapsto x\cos x$.

Correction :

Méthode :

1. Utiliser l'encadrement naturel de la partie entière.
2. Pour $x > 1$, que dire de $\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$?
3. Utiliser une suite bien choisie (u_n) telle que $\cos(u_n) = 1$ et qui tend vers $+\infty$.

Détails :

1. On a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x-1 \leqslant \lfloor x\rfloor \leqslant x$$
et donc
$$\forall x > 0, \quad \frac{x-1}{x} \leqslant \frac{\lfloor x\rfloor}{x} \leqslant 1.$$
Puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} = 1$ par théorème d'encadrement, on déduit $\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{x} = 1$.
2. Pour $x > 1$, on a $0 < \frac{1}{x} < 1$, et donc
$$\forall x > 1, \quad x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 0$$
Cela prouve que $\lim_{x\to+\infty} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 0$.
3.

Exercice 4 ●○○ **Encadrer (ou pas)** Trouver (si elles existent) les limites des fonctions suivantes en 0 :

1. $x \mapsto \lfloor \frac{1}{x}\rfloor$. **2.** $x \mapsto x\lfloor \frac{1}{x}\rfloor$. **3.** $x \mapsto x\sin\frac{1}{x}$. **4.** $x \mapsto x^8 e^{\frac{1}{|x|}}$.

Correction :

1.
2.
3. Introduisons $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ défini par $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$. On sait que
$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |\sin y| \leqslant 1,$$
et donc
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad 0 \leqslant |f(x)| \leqslant |x||\sin\frac{1}{x}| \leqslant x.$$
On déduit par encadrement que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
4.

Exercice 5 •○○ **Encadrer, comparer** Calculer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+5x^2-4x-2}{x^2+x-2}$.
2. $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2+3|x|}{x}$.
3. $\lim\limits_{x\to1}x^4\ln x$.
4. $\lim\limits_{x\to1}x\dfrac{x^n-1}{x-1}$.
5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^4+3x^2+5}-3}{x^2-1}$.
6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin 4x}$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^x)-x+\pi$.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-x^4}{x^{12}+1}$.
9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-x^4}{x^{12}+1}$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3|x|}{x}$.
11. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2+3|x|}{x}$.
12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{Arccos}(\dfrac{-e^x}{e^x+1})$.
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\tan\mathrm{Arcsin}(2e^{-x}\operatorname{sh}x)$.
14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\sqrt{\ln x}}}{x}$.
15. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

Correction :

Méthode :

1. Factoriser en haut et en bas par $x-1$, par exemple chercher a, b et b tels que
$$x^3+5x^2-4x-2=(x-1)(ax^2+bx+c).$$
2. Le problème peut venir de $x\mapsto\frac{|x|}{x}$, qui a été traité en cours. Mais si $x<0$... ?
3. Est-ce vraiment une F.I. ?
4. Quitte à délaisser un temps le facteur x, faire apparaître un taux d'accroissement.
5. Fraction et racine ?
6. Plusieurs pistes, en attendant les DL on peut déjà écrire deux formules de duplication pour $\sin(4x)$. On voit des carrés en bas, comment transformer la fraction pour en avoir en haut ?
7. Surtout pas de formules de magiciens pour $\ln(a+b)$!. Si vous n'aviez pas le $+1$ dans le logarithme, sauriez-vous faire ? Alors mettez en facteur le terme dominant DANS le logatirhme.
8. Commencez par mettre en facteur le terme dominant en haut et en bas.
9. Quel est le terme dominant cette fois-ci ?
10. Si x est « grand », que dire de $|x|$?
11. Redite du deuxième.
12. Voir une composée.
13. Pareil.
14. Attention aux fausses croissances comparées ! Passez le tout sous forme expo.
15. La fraction peut se simplifier si on ouvre l'oeil.

Détails :

1. La fraction n'est pas définie en 1 car son dénominateur $x\mapsto x^2+x-2$ s'y annule. Comme le numérateur s'y annule aussi, la limite en 1 est une forme indeterminée. On va chercher à simplifier l'expression pour $x\neq1$.
Puisque le polynôme $x\mapsto x^3+5x^2-4x-2$ s'annule en 1, on sait qu'on peut le factoriser par $(x-1)$. Ainsi, on cherche des coefficients $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad x^3+5x^2-4x-2=(x-1)(ax^2+bx+c).$$
En développant et en identifiant, on trouve :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad x^3+5x^2-4x-2=(x-1)(x^2+6x+2).$$
De même, un calcul de racines montre que
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad x^2+x-2=(x-1)(x+2).$$
Ainsi, on a
$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{1\},\quad \frac{x^3+5x^2-4x-2}{x^2+x-2}=\frac{x^2+6x+2}{x+2}.$$
Et donc
$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+5x^2-4x-2}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+6x+2}{x+2}=\frac{9}{3}=3.$$
2. Pour $x\neq0$, on a
$$\frac{x^2+3|x|}{x}=x+3\frac{|x|}{x}.$$
Or on sait que
$$\forall x<0,\quad \frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1,$$
et donc par somme de limites,
$$\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+3|x|}{x}=0-3=-3.$$
3. La fonction $x\mapsto x^4\ln(x)$ est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$ comme produit de telles fonctions. La limite en 1 n'est donc pas une forme indéterminée :
$$\lim_{x\to1}x^4\ln(x)=1^4\ln(1)=0.$$
4. Il s'agit bien d'une forme indéterminée. On sait factoriser x^n-1 en utilisant une somme télescopique :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad x^n-1=(x-1)(1+x+\ldots+x^{n-1})=(x-1)\sum_{k=0}^{n-1}x^k,$$

et donc
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad \frac{x^n-1}{x-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k,$$
ce qui n'est finalement que la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique de raison x.
On déduit
$$\lim_{x\to 1} x\frac{x^n-1}{x-1} = 1 \times \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = 1 \times n = n.$$
On pouvait aussi reconnaître un taux d'accroissement de la fonction $x \mapsto x^n$ en 1.

5.

6. Ecrire que $\sin(4x) = 2\sin(2x)\cos(2x)$. Vu le numérateur, il faut faire le bon choix et développer $\cos(2x)$:
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x).$$
Cela permet de simplifier la fraction, là où elle est définie :
$$\frac{\sin x - \cos x}{\sin(4x)} = -\frac{1}{2\sin(2x)(\cos x + \sin x)}.$$
Ce n'est plus une F.I. en $\frac{\pi}{4}$, on conclut :
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin(4x)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

7. On écrit
$$\ln(1+e^x) = \ln(e^x(e^{-x}+1)) = \ln(e^x) + \ln(e^{-x}+1) = x + \ln(e^{-x}+1).$$
Ainsi, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(1+e^x) - x + \pi = \ln(e^{-x}+1) + \pi.$$
Or $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}+1 = 1$ et donc par composition de limite
$$\lim_{x\to+\infty} \ln(e^{-x}+1) = \ln(1) = 0.$$
On déduit
$$\lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^x) - x + \pi = 0 + \pi.$$

8. On met en facteur les termes dominant aux numérateur et dénominateur :
$$\forall x > 0, \quad \frac{e^x - x^4}{x^{12}+1} = \frac{e^x}{x^{12}} \frac{1 - x^4e^{-x}}{1 + x^{-12}}$$
Or on a par croissance comparée $\lim_{x\to+\infty} x^4e^{-x} = 0$ et donc par somme puis quotient de limites :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - x^4e^{-x}}{1 + x^{-12}} = 1$$
Toujours par croissance comparée, on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{12}} = +\infty$.
Ainsi par produit des limites :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - x^4}{x^{12}+1} = +\infty.$$

9.

10.

11.

12. Commençons par chercher la limite de $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$ en $+\infty$. On a
$$\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{1+e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{1}{1+0} = 1.$$
Donc par composition de limite, puisque la fonction Arccos est <u>continue</u> en -1, on a
$$\lim_{x\to+\infty} \text{Arccos}\left(-\frac{e^x}{e^x+1}\right) = \text{Arccos}(-1) = \pi.$$

13.

14.

15. Pour $x \in \mathbb{R}_+\backslash\{1\}$, on écrit
$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1,$$
et donc
$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 1+1 = 2.$$

Exercice 6 •∘∘ **Borner au voisinage de l'infini** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue qui admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée.

Correction :

Méthode :

Visuellement évident, utiliser la définition de la limite pour borner la fonction au voisinage de $+\infty$, et ramener ainsi l'étude sur un segment.

Détails :

La stratégie est de borner la fonction sur un voisinage de $+\infty$, puis sur « ce qui reste » (un segment), et enfin de connecter les deux.

Notons $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x)$, alors il existe $A \in [0, +\infty[$ tel que

$$\begin{aligned} &\forall x \geqslant A, \quad |f(x) - \ell| \leqslant 1. \\ \iff &\forall x \geqslant A, \quad \ell - 1 \leqslant f(x) \leqslant \ell + 1. \end{aligned}$$

Notez que la valeur 1 est arbitraire, on aurait pu prendre n'importe quel valeur $\epsilon > 0$.

D'autre part, la fonction f est continue sur le segment $[0, A]$, donc elle y est bornée :

$$\exists K > 0, \quad \forall x \in [0, A], \quad -K \leqslant f(x) \leqslant K.$$

Ainsi, on pose

$$m = \min(-K, \ell - 1) \quad \text{et} \quad M = \max(K, \ell + 1).$$

Alors

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

ce qui prouve que f est bornée.

Exercice 7 ●○○ — Borner sur un segment

Montrer qu'une fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Correction :

Méthode :

Visuellement évident, borner sur un segment bien choisi, auquel on pourra ensuite se ramener.

Détails :

Exercice 8 ●●○ — Fonction périodique avec une limite

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Correction :

Méthode :

Visuellement évident, plus dur à montrer.

Considérer deux valeurs distinctes de f, et fabriquer deux suites qui tendent vers $+\infty$ pour lesquelles f prend ces deux valeurs.

Détails :

Exercice 9 ●●○ — Se ramener sur un segment

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f est minorée et atteint son minimum.

Idée : Visuellement évident. Minorer f sur des voisinages de ∞ et $-\infty$ puis sur un segment.

Exercice 10 ●●○ — Valeur absolue et extrema

1. Soient a et b deux réels, démontrer que

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|) \quad \text{et} \quad \min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en a. Montrer que $|f|$ est continue en a.
3. En déduire que si f et g sont deux fonctions continue sur un intervalle I, les fonctions $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ le sont aussi.
4. La réciproque de la question **2** est-elle vraie ?

Exercice 11 ●●○ — Doubler sans changer

On s'intéresse à l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x).$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(\frac{x}{2^n}) = f(x).$$

   Idée : Utiliser une récurrence.
2. Conclure.

   Idée : Faire tendre n vers $+\infty$.

Exercice 12 ●○○ — Sans passer par zéro

Soit f une fonction continue et ne s'annulant pas sur un intervalle I. Montrer que f est de signe constant.

Exercice 13 ●●○ — Existence de point fixe pour un intervalle stable

Soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a, b]$, à valeurs dans $[a, b]$. Démontrer qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Correction :

Méthode :

On pourra chercher à montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ s'annule. Pour cela regardez les valeurs de g en a et b. N'oubliez pas l'hypothèse que f est à valeurs dans $[a, b]$.

Détails :

Introduisons donc la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ défine par $g(x) = f(x) - x$. Puisque f est à valeurs dans $[a, b]$, on a

$$\forall x \in [a, b], \quad a \leqslant f(x) \leqslant b,$$

et donc

$$g(a) = f(a) - a \geqslant 0 \quad \text{et} \quad g(b) = f(b) - b \leqslant 0.$$

En outre, la fonction g est continue, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires g s'annule sur $[a, b]$:

$$\exists x \in [a, b], \quad g(x) = 0$$

c'est-à-dire $f(x) = x$.

Exercice 14 ●●○ — Couper sa translatée Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Montrer que l'équation $f(x + \frac{1}{2}) = f(x)$, d'inconnue $x \in [0, \frac{1}{2}]$, a au moins une solution.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer un résultat analogue pour l'équation $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.

Idée : Mêmes idées que l'exo précédent : montrer qu'une fonction bien choisie s'annule. Attention à l'ensemble de de définition !

Exercice 15 ●●○ — Fonction continue et discrète Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Que dire de f ?

Idée : Utiliser le TVI.

Exercice 16 ●●● — Une vieille équation fonctionnelle Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1. Donner l'exemple d'une telle fonction f.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(nx) = nf(x)$. En déduire les valeurs f sur $\mathbb{N}$ en fonction de $f(1)$.
3. En déduire f sur $\mathbb{Z}$.
4. En déduire f sur $\mathbb{Q}$.
   Idée : Ecrire $1 = \frac{n}{n}$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ afin d'obtenir $f(\frac{1}{n})$.
5. Conclure.
   Idée : Utiliser un résultat théorique permettant de passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$.