Feuille d'exercices 9
Limites et continuités

Exercice 1 •∘∘ **Vrai ou faux ?** Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en citant le cours ou en exhibant un contre-exemple :

1. Si une fonction admet une limite en un point, alors elle est définie en ce point.
2. Si une fonction admet des limites à gauche et à droite en un point, et que ces limites sont égales, alors elle admet une limite en ce point.
3. Si une fonction est bornée, alors elle admet une limite en $+\infty$.
4. Si une fonction est non bonée au voisinage de $+\infty$, alors elle tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
5. Si une fonction a sa courbe au dessus de celle de la fonction carré, alors elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
6. Si une fonction paire tend vers une limite en $+\infty$, alors elle tend vers la même limite en $-\infty$.
7. Si une fonction est strictement positive, alors elle ne peut pas tendre vers 0 en $+\infty$.
8. Si une fonction est strictement croissante, alors elle tend vers $+\infty$.
9. Si une fonction tend vers $+\infty$ en $+\infty$, alors elle est croissante.
10. Si une fonction strictement positive tend vers 0 en $+\infty$, alors elle est décroissante à partir d'une certaine abscisse.

Exercice 2 •∘∘ **Limites epsilonesque** Déterminer les limites des fonctions suivantes, en utilisant les quantificateurs :

1. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ en 0. **2.** $x \mapsto \ln(e^x+1)$ en $+\infty$, puis en $-\infty$.
3. $x \mapsto \frac{2x+1}{x+3}$ en $+\infty$ **4.** $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ en 0^+ puis en 0^-.

Exercice 3 •∘∘ **Encadrer (ou pas)** Trouver (si elles existent) les limites des fonctions suivantes en $+\infty$:

1. $x \mapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$. **2.** $x \mapsto x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$. **3.** $x \mapsto x\cos x$.

Exercice 4 •∘∘ **Encadrer (ou pas)** Trouver (si elles existent) les limites des fonctions suivantes en 0 :

1. $x \mapsto \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$. **2.** $x \mapsto x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$. **3.** $x \mapsto x\sin\frac{1}{x}$. **4.** $x \mapsto x^8 e^{\frac{1}{|x|}}$.

Exercice 5 •∘∘ **Encadrer, comparer** Calculer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+5x^2-4x-2}{x^2+x-2}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+3|x|}{x}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 1} x^4 \ln x$.

4. $\lim\limits_{x\to 1} x\dfrac{x^n-1}{x-1}$. **5.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^4+3x^2+5}-3}{x^2-1}$. **6.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin 4x}$.

7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(1+e^x) - x + \pi$. **8.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x - x^4}{x^{12}+1}$. **9.** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x - x^4}{x^{12}+1}$.

10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+3|x|}{x}$. **11.** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+3|x|}{x}$. **12.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{Arccos}(\dfrac{-e^x}{e^x+1})$.

13. $\lim\limits_{x\to +\infty} \tan \operatorname{Arcsin}(2e^{-x}\operatorname{sh} x)$. **14.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{\sqrt{\ln x}}}{x}$. **15.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

Exercice 6 •∘∘ **Borner au voisinage de l'infini** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue qui admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée.

Exercice 7 •∘∘ **Borner sur un segment** Montrer qu'une fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 8 ••∘ **Fonction périodique avec une limite** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 9 ••∘ **Se ramener sur un segment** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f est minorée et atteint son minimum.

<u>**Idée**</u> : Visuellement évident. Minorer f sur des voisinages de ∞ et $-\infty$ puis sur un segment.

Exercice 10 ●●○ — Valeur absolue et extrema

1. Soient a et b deux réels, démontrer que
$$\max(a,b)=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|) \quad \text{et} \quad \min(a,b)=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|).$$
2. Soit $a\in\mathbb{R}$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en a. Montrer que $|f|$ est continue en a.
3. En déduire que si f et g sont deux fonctions continue sur un intervalle I, les fonctions $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ le sont aussi.
4. La réciproque de la question **2** est-elle vraie ?

Exercice 11 ●●○ — Doubler sans changer On s'intéresse à l'ensemble des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues en 0 telles que
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(2x)=f(x).$$

1. Montrer que
$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R},\quad f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f(x).$$
Idée : Utiliser une récurrence.
2. Conclure.
Idée : Faire tendre n vers $+\infty$.

Exercice 12 ●○○ — Sans passer par zéro Soit f une fonction continue et ne s'annulant pas sur un intervalle I. Montrer que f est de signe constant.

Exercice 13 ●●○ — Existence de point fixe pour un intervalle stable Soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a,b]$, à valeurs dans $[a,b]$. Démontrer qu'il existe $x\in[a,b]$ tel que $f(x)=x$.

Exercice 14 ●●○ — Couper sa translatée Soit $f:[0,1]\to[0,+\infty[$ une fonction continue telle que $f(0)=f(1)=0$.

1. Montrer que l'équation $f(x+\frac{1}{2})=f(x)$, d'inconnue $x\in[0,\frac{1}{2}]$, a au moins une solution.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, montrer un résultat analogue pour l'équation $f(x+\frac{1}{n})=f(x)$.

Exercice 15 ●●○ — Fonction continue et discrète Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Que dire de f ?
Idée : Utiliser le TVI.

Exercice 16 ●●● — Une vieille équation fonctionnelle Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue vérifiant
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\quad f(x+y)=f(x)+f(y).$$

1. Donner l'exemple d'une telle fonction f.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f(nx)=nf(x)$. En déduire les valeurs f sur $\mathbb{N}$ en fonction de $f(1)$.
3. En déduire f sur $\mathbb{Z}$.
4. En déduire f sur $\mathbb{Q}$.
Idée : Ecrire $1=\frac{n}{n}$ pour un entier $n\in\mathbb{N}$ afin d'obtenir $f(\frac{1}{n})$.
5. Conclure.
Idée : Utiliser un résultat théorique permettant de passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$.