Feuille d'exercices 8
Suites

Exercice 1 ●○○ **Inf et sup** Déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

1. $A = \{3^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$.
2. $B = \{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\}$.
3. $B = \{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^*\}$.

Exercice 2 ●●○ **Le retour de la trigo** Soit $A = \{x \in \mathbb{R}, \sin(\frac{1}{x}) = 0\}$.

1. Si vous disposez d'un outil graphique, représenter A.
2. Montrer que A est une partie non vide et borné de $\mathbb{R}$.
3. Etudier $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\max(A)$ et $\min(A)$.
4. Mêmes questions avec $B = A \cap \mathbb{R}_+$.

Exercice 3 ●●○ **Le symbole égal pour un analyste** Soient a et b deux réels, montrer que

$$a = b \iff \forall \varepsilon > 0,\ |a-b| < \varepsilon.$$

Correction :
Méthode :
On raisonne par double implication. le sens direct est évident. Pour la réciproque, l'assertion de droite indique que $|a-b|$ peut être “aussi petit que l'on veut”, mais comment faire une preuve ? Si jamais on avait $a \neq b$, alors on aurait $|a-b| > 0$, et on appliquerait l'assertion de droite avec un ϵ bien choisi.
Détails :
Pour le sens direct : Si $a = b$, alors $|a-b| = 0$, et l'assertion de droite est triviale.
Montrons la réciproque. Supposons que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ |a-b| < \varepsilon.$$

Supposons par l'aburde que $a \neq b$, alors on aurait $|a-b| > 0$. On prend alors $\epsilon = \frac{|a-b|}{2}$, et on obtient

$$|a-b| < \frac{|a-b|}{2}$$

ce qui est une absurdité. Ainsi on a $a = b$.

Exercice 4 ●○○ **Limites epsilonesques** Donner les limites des suites suivantes avec vos connaissances du lycée, puis démontrer vos résultats de manière epsilonesque

1. $u_n = \frac{n-1}{n+1}$. **2.** $v_n = \sqrt{n} - 1$. **3.** $w_n = \frac{n}{n^2+2}$.

Correction :
Méthode :

1. On obtient avec les techniques du lycée que la limite vaut 1. Pour le prouver : on fixe $\epsilon > 0$, et on cherche à résoudre l'inéquation $|u_n - 1| \leqslant \epsilon$: il faut prouver que cette inégalité est vraie pour $n > N$, où $N \in \mathbb{N}$ est à trouver (et dépend en général de ϵ).
2. On obtient avec les techniques du lycée que la limite vaut $+\infty$. Pour le prouver : on fixe $A \in \mathbb{R}$, et on cherche à résoudre l'inéquation $u_n \geqslant A$: il faut prouver que cette inégalité est vraie pour $n \geqslant N$, où $N \in \mathbb{N}$ est à trouver (et dépend en général de A).
3. Comme la première (mais pas avec la même limite).

Détails :

1. On a directement :

$$u_n = \frac{n-1}{n+1} = \frac{n(1-\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \quad \text{et donc} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Prouvons cela en revenant à la définition. Soit $\epsilon > 0$, on forme $|u_n - 1|$, que l'on cherche à majorer par ϵ :

$$|u_n - 1| = |\frac{n-1}{n+1} - 1| = |\frac{n-1-(n+1)}{n+1}| = \frac{2}{n+1}.$$

On raisonne par équivalence :

$$|u_n - 1| \leqslant \epsilon \iff \frac{2}{n+1} \leqslant \epsilon \iff \frac{2}{\epsilon} - 1 \leqslant n.$$

Ainsi, on pose $N = E(\frac{2}{\epsilon} - 1) + 1$ (cette formule donne le premier entier après $\frac{2}{\epsilon} - 1$), on a bien :

$$\forall n \geqslant N, \quad |u_n - 1| \leqslant \epsilon.$$

Faisons le bilan, on a montré que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, \quad |u_n - 1| \leqslant \epsilon.$$

Cela prouve que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2. Il est direct que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Prouvons cela en revenant à la définition. Soit $A \in \mathbb{R}$, on raisonne par équivalence :

$$v_n \geqslant A \iff \sqrt{n} - 1 \geqslant A \iff \sqrt{n} \geqslant A + 1 \iff n \geqslant (A+1)^2,$$

la dernière équivalence venant du fait que $\sqrt{n} \geqslant 0$. O pose donc $N = E((A+1)^2)+1$, et on a bien

$$\forall n \geqslant N, \quad v_n \geqslant A.$$

Faisons le bilan, on a montré que

$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, \quad v_n \geqslant A.$$

Cela prouve que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

3. On a directement en divisant en haut et en bas par n : :

$$w_n = \frac{1}{n + \frac{2}{n}}, \quad \text{or} \lim_{n\to+\infty} n + \frac{2}{n} = +\infty \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} w_n = 0.$$

Prouvons cela en revenant à la définition. Soit $\epsilon > 0$, on raisonne par équivalence :

$$|w_n| \leqslant \epsilon \iff \frac{n}{n^2+2} \leqslant \epsilon \iff \epsilon n^2 - n + 2\epsilon \geqslant 0.$$

Il faut alors voir le membre de droite comme un polynôme en n pour mieux l'étudier. On sait que que le polynôme $P : x \mapsto \epsilon x^2 - x + 2\epsilon$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 8\epsilon^2$. Si $\epsilon > \frac{1}{\sqrt{8}}$, alors $\Delta \leqslant 0$, et $P \geqslant 0$: il n'y a rien à faire. Par contre, si $\epsilon \leqslant \frac{1}{\sqrt{8}}$, alors P a deux racines :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-8\epsilon^2}}{2\epsilon} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-8\epsilon^2}}{2\epsilon}.$$

On sait que P est négatif entre ses racines, et positifs ailleurs, et donc :

$$\forall x \geqslant x_2, \quad P(x) \geqslant 0.$$

Ainsi, on pose $N = E(x_2) + 1 = E(\frac{1+\sqrt{1-8\epsilon^2}}{2\epsilon}) + 1$ (cette formule donne le premier entier après x_2), on a bien d'après ce qui précède :

$$\forall n \geqslant N, \quad |u_n| \leqslant \epsilon.$$

Faisons le bilan, on a montré que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, \quad |u_n| \leqslant \epsilon.$$

Cela prouve que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 5 ●○○ **Limites faciles** Déterminer (si elles existent) les limites des suites suivantes en utlisant les règles usuelles :

1. $u_n = (-3n^2 + 100)(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2})$. **2.** $\frac{n^2+\sin n}{n+1}$ **3.** $v_n = \sqrt{4n-1} - \frac{6n+1}{\sqrt{9n+1}}$.

Exercice 6 ●○○ **Monotonie : trouvez la stratégie** Etudier la monotonie des suites suivantes :

1. Pour $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{n!}{n^n}$
2. Pour $n \geqslant 0$, $v_n = -n^2 + n + 2$.
3. $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $w_{n+1} = w_n^2 - w_n + 1$ et $w_0 \in \mathbb{R}$ (croissance : facile, stricte croissance ? plus dur : discuter selon w_0).

Correction :

Méthode :

1. On peut comparer $u_{n+1} - u_n$ avec 0, ou bien, puisque la suite est positive, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1. La suite étant définie par un quotient, on choisit cette deuxième option, en outre, on sait que les factorielles et les puissances ont des chances de bien se simplifier.
2. La suite est définie "explicitement" à partir d'une fonction réelle qu'il est facile d'étudier. Mais la situation est plus subtile qu'il n'y paraît.

Détails :

1. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n > 0$, on forme $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, que l'on cherche à comparer à 1. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{(n+1)} \times \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)} \times (n+1)^n} \times \frac{n^n}{\cancel{n!}} = (\frac{n}{n+1})^n.$$

Dans ce calcul classique, on a cherché des points commun entre les deux fractions pour les simplifier, et on utilisé $(n+1)! = (n+1)n!$, qui doit être un automatisme quand on souhaite simplifier plusieurs factorielles.

Or, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n}{n+1} < 1 \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad (\frac{n}{n+1})^n < 1.$$

Ainsi, on a

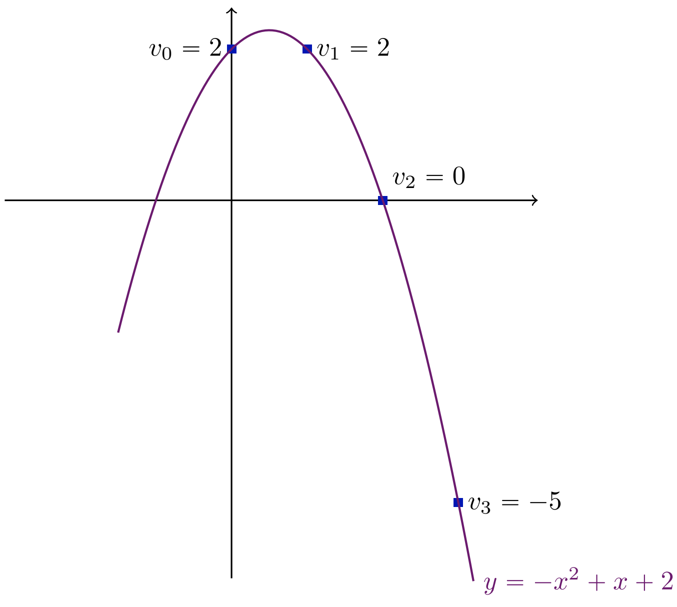
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad u_{n+1} < u_n$$

puisque la suite est positive.

Finalement, la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. On introduit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x^2 + x + 2$, de sorte que $v_n = f(n)$. On sait que la monotonie de f va impacter celle de la suite. Or la fonction f est un trinôme de coefficient dominant négatif, son maximum est atteint en "$-\frac{b}{2a}$" $= \frac{1}{2}$, et donc elle est strictement décroissante sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$ puis strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

Attention à ne pad conclure trop vite ! La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante à partir du rang $n = 1$ car $1 > \frac{1}{2}$. Or $v_0 = v_1 = 2$. Donc, la suite est décroissante (mais pas strictement).



3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on forme $w_{n+1} - w_n$ pour voir son signe. On a :

$$w_{n+1} - w_n = w_n^2 - 2w_n + 1 = (w_n - 1)^2 \geqslant 0.$$

Ainsi, la suite (w_n) est croissante.

Plus dur : est-elle strictement croissante ? On remarque que $(w_n - 1)^2 > 0$ si et seulement si $w_n \neq 1$. De plus si pour un certain rang $N \in \mathbb{N}$ on a $w_N = 1$, alors par récurrence directe, on a : $\forall n \geqslant N,\ w_N = 1$, et la suite est constante. Ainsi, si $w_0 = 1$, la suite est constante. Mais est-il possible que la suite démarre à $w_0 \neq 1$ et vale 1 au bout d'un moment ? Supposons que ce soit le cas et notons $N \geqslant 1$ le premier entier tel que $w_N = 1$. Analysons, on a l'équivalence :

$$w_N = 1 \iff 1 = w_{N-1}^2 - w_{N-1} + 1 \iff w_{N-1} = 0 \quad \text{ou} \quad w_{N-1} = 1,$$

et le deuxième cas étant exclus, c'est que $w_{N-1} = 0$. Est-ce possible ? Si $N = 1$, on peut bien avoir $w_0 = 0$, autrement, pour $N \geqslant 2$, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 - x + 1 > 0$ (car le discriminant est négatif), on a

$$w_{N-1} = w_{N-2}^2 - w_{N-2} + 1 > 0,$$

et donc c'est impossible.

En conclusion, on a trois cas distincts :

- Ou bien $w_0 = 1$, et la suite est constante.
- Ou bien $w_0 = 0$, et $w_1 = 1$, et la suite est constante à partir de $N = 1$,
- Ou bien $w_0 \notin \{0, 1\}$, et alors pour tout $n \geqslant 0$, on a $w_n \neq 1$, et donc la suite est alors strictement croissante.

Exercice 7 •∘∘ **Limites : Trouvez la stratégie** Etudier les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{\frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}{\frac{\pi}{n} - \frac{7}{n^3}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

2. $u_n = \frac{\sqrt{n^2+3} - n}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

3. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_{n+1} = 1 + u_n^2$ et u_0 quelconque.

Exercice 8 ••• **Suites entières convergentes** Soit u_n une suite d'entiers qui converge. Que dire ?

Correction :

Méthode :

Intuitivement, la suite (u_n) se rapproche d'une limite, qui doit être un entier fixé. Mais comme elle est elle même entière, elle devrait donc être égale à cet entier (en tout cas à partir d'un certain rang). Comment le mettre en forme ? Ecrire la défnition de limite avec ϵ, et commencer par montrer que la limite est un entier, en choisissant ϵ judicieusement. Ensuite, s'arranger pour montrer que la suite ne peut plus valoir autre chose que cet entier.

Détails :

Mettons en forme en suivant les idées de la méthode. Par définition :

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| \leqslant \epsilon.$$

Commençons par montrer que la limite ℓ est un entier. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Soit m l'entier le plus proche (autrement dit $m = E(\ell)$ ou bien $m = E(\ell) + 1$). Alors $|m - \ell| > 0$, et en prenant $\epsilon = \frac{|m-\ell|}{2}$, on obtient

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| \leqslant \frac{|m - \ell|}{2}.$$

Or, puisque u_n est un entier, on a nécessairement par définition de m :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |m-\ell| \leqslant |u_n - \ell|,$$

ce qui donne pour $n \geqslant N$ en mettant bout à bout les deux inégalités :

$$|m-\ell| \leqslant |u_n-\ell| \leqslant \frac{|m-\ell|}{2}.$$

C'est une absurdité, donc $\ell \in \mathbb{N}$. Notez que la preuve marche avec n'importe quel $\epsilon \in]0, |m-\ell|[$ et qu'on a pris $\epsilon = \frac{|m-\ell|}{2}$ pour fixer les idées.

Pour continuer, on reprend la définition de la limite avec $\epsilon = \frac{1}{2}$. On a alors :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2}$$

et donc à partir du rang N, on a $u_n \in [\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}]$. Or le seul entier dans l'intervalle $[\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}]$ est ℓ lui-même, donc puisque u_n est un entier, on obtient :

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n = \ell$$

autrement dit : la suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

Notez que cette partie de la preuve fonctionnait avec n'importe quel $\epsilon \in]0,1[$.

A retenir : Dans cet exercice conceptuel, on a des idées comme "la suite doit se rapproche d'une valeur ℓ", et pour faire des preuves il est standard d'exploiter la définition avec des valeurs de ϵ qui conduisent à des absurdités ou à des situations où on a peu de choix pour la valeur de u_n à cause des hypothèses.

Exercice 9 ●●○ — La série harmonique diverge Soit $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Démontrer que pour $n \geqslant 1$, on a $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2. Supposons que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge, quelle serait la limite de $(S_{2n} - S_n)_{n\geqslant 1}$?
3. Conclure

Correction :

Méthode :

1. $S_{2n} - S_n$ est une somme, combien y a-t-il de termes ? Une minoration naturelle est d'essayer de minorer par le "nombre de termes fois plus grand terme".

Détails :

1. On a (si cela ne vous paraît pas évident, passez-y du temps) :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Cette somme comporte $2n - n = n$ termes (on peut le vérifier en sachant qu'une somme du type $\sum_{k=a}^{b}$ comporte $b-a+1$ termes). Or

$$\forall k \in [\![n+1\,, 2n]\!]\,, \quad \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}.$$

(de même, cette inégalité doit vous sembler naturelle, pensez aussi qu'elle vient de la décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $[n+1, 2n]$).

On déduit :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\text{cste}} = \underbrace{n\times}_{\text{nb de termes}} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

2. Si $(S_n)_{n\geqslant 1}$ convergeait vers une limite ℓ , la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$, qui est une suite extraite de $(S_n)_{n\geqslant 1}$, convergerait elle aussi vers ℓ. On a aurait alors

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} - S_n = \ell - \ell = 0.$$

3. Supposons par l'absurde que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge. D'après la question **2**, on

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} - S_n = \ell - \ell = 0.$$

Mais cela contredit la question **1** qui implique que $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$ (passage à la limite dans une inégalité). Ainsi, la série $(S_n)_{n\geqslant 1}$ diverge. Puisqu'elle est strictement croissante (évident), elle tend vers $+\infty$. On peut conclure :

$$\boxed{\text{La série harmonique } (S_n)_{n\geqslant 1} \text{ tend vers } +\infty}.$$

A retenir

L'épreuve maths C de banque PT 2023 tournait autour de ces thèmes, et demandait pas exemple de calculer $S_{2n+1} - \frac{1}{2}S_n$.

"Former" des paquets pour la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ en calculant $S_{2n} - S_n$ n'est pas vraiment dans l'esprit du programme, mais cette technique est pertinente lorsque la suite à étudier est une somme. Il faut donc être à l'aise pour calculer des différences de sommes. la technique de minoration "plus petit terme fois nombre de termes" est, elle, standard, et marche aussi pour les majorations, par "plus grand terme fois nombre de termes".

Pour aller plus loin On verra que S_n se comporte lorsque $n \to +\infty$ comme $\ln n$, on le montre à la main dans un autre exo du TD, et on verra des techniques plus puissantes à base d'intégrale pour étudier des sommes avec un grand nombre de termes. En particulier $S_{2n} - S_n$ converge vers $\ln 2$, dur à intuiter !

Exercice 10 ••• La série harmonique corrigée converge Soit $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On définit aussi les suites

$$u_n = S_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = S_n - \ln(n+1).$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(\frac{n+1}{n}) \leqslant \frac{1}{n}$.
2. Démontrer que les suites u_n et v_n sont adjacentes.
3. En déduire l'existence d'une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que la suite $(S_n - \ln n)_{n\geqslant 0}$ converge vers γ. Montrer que l'on peut écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \ln n + \gamma + w_n,$$

avec $(w_n)_{n\geqslant 0}$ qui tend vers 0

4. Soit la suite définie pour $n \geqslant 1$ par

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}.$$

Exprimer (s_n) à partir de (S_n), et en déduire la limite de (s_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction :

Méthode :

Typique d'un problème de DS/concours, les questions s'appuient les unes sur les autres. Par exemple, la question **Q3** est très facile en admettant la question 2, ce qui est bien sûr permis (avec modération), et permet d'être opportuniste si on connait son cours sur les suites adjacentes.

1. Une double inégalité, on doit avoir en tête des inégalités sur la fonction ln, en particulier $\ln(1+x) \leqslant x$, inégalité classique que l'on prouve à la main (qui se comprendra encore mieux au S2). On doit remarquer que $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, l'inégalité de droite se déduit alors avec $x = \frac{1}{n}$.
Pour l'inégalité de gauche, il faudrait exploiter ce travail mais en faisant apparaître $n+1$ au dénominateur, or on a $\ln(\frac{n+1}{n}) = -\ln\frac{n}{n+1}$, et on peut appliquer une technique de balayeur au numérateur.
2. On rappelle que les deux suites sont adjacentes lorsque (u_n) et (v_n) sont monotones, de monotonie opposées, et que $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.
Il est direct de calculer la limite de $u_n - v_n$ avec des techniques de lycée. On étudie la monotonie des suites en formant $u_{n+1} - u_n$ et $v_{n+1} - v_n$. Dans les deux cas, on doit simplifier $S_{n+1} - S_n$, et on constate que la question précédente nous sert.
3. Que dire de suites adjacentes ?
4. Quel est lien avec les questions précédentes ? Il faut manipuler la somme pour faire apparaître la suite (S_n). On y voit plus clair en écrivant s_n explicitement avec des points du suspension.

Détails :

1. Montrons l'inégalité de droite. On a

$$\ln(\frac{n+1}{n}) = \ln(1+\frac{1}{n}).$$

On va donc comparer $\ln(1+x)$ et x. La méthode classique est d'étudier la différence : on pose $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \ln(1+x)$. On a

$$\forall x \geqslant -1, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Ainsi f est décroissante sur $]-1,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$, et donc (faire un tableau de variations) :

$$\forall x \geqslant -1, \quad f(x) \geqslant f(0) = 0 \iff \forall x \geqslant -1, \ln(1+x) \leqslant x.$$

On applique cette inégalité avec $x = \frac{1}{n}$ et on obtient $\ln(1+\frac{1}{n}) \leqslant \frac{1}{n}$ et donc l'inégalité de droite.
Pour l'inégalité de gauche, on écrit

$$\ln(\frac{n+1}{n}) = -\ln(\frac{n}{n+1}) = -\ln(\frac{n+1-1}{n+1}) = -\ln(1-\frac{1}{n+1}).$$

Or pour $n \geqslant 1$, on a bien $-1 < -\frac{1}{n+1}$ et on peut appliquer l'inégalité avec $x = -\frac{1}{n+1}$. On obtient

$$\ln(1-\frac{1}{n+1}) \leqslant -\frac{1}{n+1} \iff \frac{1}{n+1} \leqslant -\ln(1-\frac{1}{n+1}) = \ln(\frac{n+1}{n})$$

ce qui est bien l'inégalité de gauche.

2. Déjà, on a

$$u_n - v_n = \ln n - \ln(n+1) = \ln(\frac{n}{n+1}).$$

De plus, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \ln(\frac{n}{n+1}) = \ln 1 = 0,$$

par continuité de la fonction ln en 1.

Etudions maintenant la monotonie des suites. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on forme :

$$u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - \ln(n+1) - S_n + \ln(n).$$

Or par compensation des termes :

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}.$$

Ce type de formule doit vous sauter aux yeux et vous paraître facile, si ce n'est pas le cas passez-y du temps. Ainsi on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln(\frac{n+1}{n})$$

et donc d'après **Q1** (inégalité de gauche) on a $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et donc (u_n) est décroissante.

On montre exactement de la même manière que la suite (v_n) est croissante.

Résumons : on a montré

- On a $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$,
- La suite (u_n) est croissante,
- La suite (v_n) est décroissante.

Ainsi, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

3. Comme les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles sont aussi convergentes. Ainsi, il existe un réel, que l'énoncé note γ, tel que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - \ln n = \gamma.$$

On a la formule demandée en posant $w_n = S_n - \ln n - \gamma$.

4. On y voit plus clair en écrivant

$$\forall n \geqslant 1, \quad s_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} = S_{2n} - S_n.$$

On se sert alors de la question précédente :

$$S_{2n} - S_n = \ln(2n) + \gamma + w_{2n} - \ln n - \gamma - w_n = \ln 2 + w_{2n} - w_n$$

et puisque (w_n) tend vers 0, la suite extraite (w_{2n}) aussi, et on a

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \ln 2.$$

Pour aller plus loin : Le nombre $\gamma \in \mathbb{R}$ est connu sous le nom de constante d'Euler (ou encore constante d'Euler-Mascheroni), Euler en donna une valeur approchée à 6 décimale en 1735. Ce nombre est encore très mystérieux plus 300 ans après, on ignore s'il est irrationnel ! ll est standard d'écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \ln n + \gamma + w_n$$

avec $(w_n)_{n\geqslant 0}$ qui tend vers 0. Ce type de formules sera étudiées au chapitre 'développement asymptotique", au S2. On peut retrouver ces thèmes dans banque PT 2023 maths C.

Exercice 11 •○○ — N'inventons pas de règle

Pour deux suites (u_n) et (v_n) réelles, montrer que les règles suivantes sont fausses en exhibant un contre exemple :

1. Si $(u_n + v_n)$ converge, alors (u_n) et (v_n) converge. Et si on suppose de plus que (u_n) converge ?
2. Si $(u_n v_n)$ converge vers 0, alors (u_n) ou (v_n) converge vers 0.

Correction :

Méthode :

1. L'idée est que chacune des suites peut diverger mais la somme converger par "compensation".
2. L'idée est que les suites peuvent "se relayer" afin que le produit tende vers 0.

Détails :

1. La réponse est non. On peut imaginer $u_n = (-1)^n$ et $v_n = -u_n$, ces deux suites divergent mais $(u_n + v_n)$ est la suite nulle, elle converge bien.
   Ce contre-exemple marche avec n'importe quelle suite (u_n) divergente, et $v_n = -u_n$.
   Si par contre on suppose que (u_n) converge, alors $(-u_n)$ aussi, et on écrit
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \underbrace{u_n + v_n}_{\text{convergent}} + \underbrace{(-u_n)}_{\text{convergent}}$$
   qui est convergente comme somme de deux suites convergentes.
2. Un peu plus difficile, on peut imaginer deux suite telles que le produit $u_n v_n$ est carrément nul, mais aucune des deux ne l'est (et n'a de limite). Par exemple :
   $$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}.$$
   On a
   $$\forall \in \mathbb{N}, \quad u_n v_n = 0 \quad \text{mais} \quad (u_n) \quad \text{et} \quad (v_n) \quad \textit{diverge}.$$
   Notez que la preuve que ces suites divergent n'est pas directe : on peut parler des suites extraites, ou bien le montrer à la main avec des epsilon.

Exercice 12 ●●○ Suites cosinus et sinus d'entiers

On s'intéresse aux suites $(\cos n)_{n\geqslant 0}$ et $(\sin n)_{n\geqslant 0}$

1. Supposons que $(\cos n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
   a. En étudiant $(\cos(2n))_{n\geqslant 0}$, que dire de ℓ ?
   b. Etudier $(\cos(n+1)+\cos(n-1))_{n\geqslant 0}$ et conclure.
2. Effectuer un travail similaire pour la suite $(\sin n)_{n\geqslant 0}$.

Correction :
Méthode :

1. a. L'indication invite à utiliser une formule de dupplication. Par ailleurs, $(\cos(2n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b. Mêmes raisonnements mais avec les formules d'addition. En mélangant les formules sur ℓ, quelque chose doit vous sembler absurde.
2. Si on essaye de reproduire le raisonnement, on peut être en difficulté car les formules de dupplication ne sont pas les mêmes. Peut-être essayer de travailler sur des formules d'aditions ?

Détails :

1. a. On a, avec la formule de dupplication (à savoir par coeur)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \cos(2n) = 2\cos^2 n - 1.$$

Or, si la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, la suite extraite $(\cos(2n))_{n\in\mathbb{N}}$ aussi, et on a par passage à la limite dans la formule de dupplication :

$$\ell = 2\ell^2 - 1.$$

Ainsi, les limites possibes pour cette équation sont les solutions de cette équation, à savoir $-\frac{1}{2}$ et 1.

   b. De même on utilise les formules d'addition :

$$\cos(n+1)+\cos(n-1) = \cos n\cos 1 - \sin n \sin 1 + \cos n \cos 1 + \sin n \sin 1 = 2\cos n \cos 1.$$

Et encore une fois en passant à la limite, on aurait

$$2\ell = 2\ell\cos 1.$$

On a vu à la question précédente que $\ell \neq 0$, on déduit

$$\cos 1 = 1$$

ce qui est bien sûr absurde car $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$ et donc $1 > \cos 1 > 0$ par monotonie.

2. La formule de dupplication ne donne pas exactement la même info, puisque cette fois $\sin(2n) = 2\sin n\cos n$. Il faut laisser cette piste de côté. Par contre, on a

$$\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\sin 1\cos n \iff \cos n = \frac{\sin(n+1)-\sin(n-1)}{2\sin 1},$$

en effet $\sin 1 \neq 0$ par les mêmes arguments que la question précédente.
Ainsi, si $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, les suites extraites $(\sin(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait vers la même limite ℓ, et on aurait alors

$$\lim_{n\to+\infty} \cos n = \frac{\ell-\ell}{2\sin 1} = 0.$$

Or on a vu à la question précédente que la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergeait. Donc la suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi.

Exercice 13 ●○○ Relation de récurrence

Soit la suite définie par

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n^2+1} \quad \text{et} \quad u_0 = -1.$$

Justifier qu'elle est bien définie. Cette suite est-elle minorée ? majorée ? monotone ? (plus dur : convergente ?)

Exercice 14 ●●○ Relation de récurrence

Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} \quad \text{et} \quad u_0 = \frac{1}{2}.$$

1. a. Mettre la relation de récurrence sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ après avoir définie une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ adéquate. En déduire que cette suite est bien définie, et que de plus $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b. En étudiant les variations de f, démontrer que la suite est croissante et donner sa valeur minimum.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant 1 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(1-u_n).$$
3. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant 1 - u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(1-u_0).$$
4. On pose $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$. Déterminer la nature de la suite (v_n) et en déduire une expression de (u_n).

Exercice 15 ●●○ Racines d'une suite de polynômes

Soit n un entier avec $n \geqslant 2$, et soit P_n la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$P_n(x) = x^n - nx + 1.$$

1. Démontrer que P_n admet une unique racine sur $[0,1]$, que l'on note u_n.
2. Comparer $P_{n+1}(u_{n+1})$ et $P_n(u_{n+1})$, puis en déduire les variations de u_n.
3. En déduire que (u_n) converge.
4. Montrer que sa limite est nulle (raisonner par l'absurde).

Correction :

Méthode :

C'est l'exo type de suite définie implicitement. Dur la première fois, mais les exos se ressemblent souvent.

Détails :

Pour mieux comprendre : Avant de se lancer, analysons le problème pour $n = 2$ et $n = 3$.

Lorsque $n = 2$, il est direct que

$$P_2(x) = 0 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff x = 1 \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad u_2 = 1.$$

Lorsque $n = 3$, le nombre u_3 est la solution (dans $[0,1]$) de l'équation

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Il n'est pas possible avec nos moyens de calculer explicitement ce nombre ! Mais par un tableau de variation de la fonction $x \mapsto x^3 - 3x + 1$, on peut montrer que cette équation a bien une unique solution. Et même si on dispose d'une formule (compliquée) pour u_3, le problème d'expliciter (mais que veut dire expliciter ?) u_n pour $n \geqslant 5$ devient carrément insoluble. Le but de ce type d'exercice est de d'étudier la suite, alors même qu'on ne peut pas calculer explicitement ses termes.

1. On veut étudier les variations de la fonction P_n, en particulier sur $[0,1]$. La fonction P_n est dérivable, et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1).$$

Or on a

$$\forall x \in]0,1[, \quad 0 < x^{n-1} < 1 \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad P_n'(x) < 0.$$

Cela prouve que P_n est strictement décroissante sur $[0,1]$, de plus, on a $P_n(0) = 1$ et $P_n(1) = 2 - n \leqslant 0$ car $n \geqslant 2$.

De plus la fonction P_n est continue en tant que polynôme.

Ainsi, on peut appliquer le théorème de la bijection : la fonction P_n est une bijection strictement décroissante de $[0,1]$ sur $[2-n, 1]$. Comme $0 \in [2-n, 1]$, on a bien un unique antécédant à 0 :

$$\exists! x \in [0,1], \quad P_n(x) = 0.$$

Comme cette racine dépend de n, on la renote u_n.

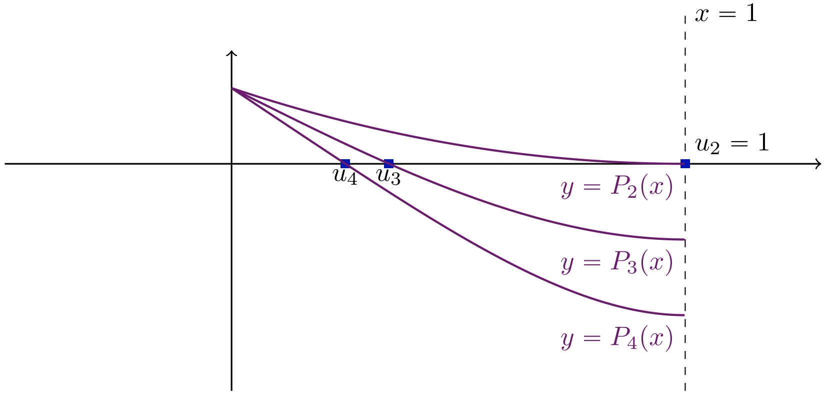
2. Fisons $x \in [0,1]$, et comparons $P_n(x)$ et $P_{n+1}(x)$. On a

$$P_n(x) - P_{n+1}(x) = x^n - nx - x^{n+1} + (n+1)x = x^n(1-x) + x \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad x \in [0,1].$$

et donc pour $x \in [0,1]$ fixé, on a $P_n(x) \geqslant P_{n+1}(x)$. On applique cette inégalité avec $x = u_{n+1}$, et puisque $P_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ par définition, on obtient :

$$\forall n \geqslant 2, \quad P_n(u_{n+1}) \geqslant 0 = P_n(u_n).$$

Il faut maintenant exploiter cela, en utilisant la monotonie de la fonction P_n, qu'on rappelle être décroissante. Supposons par l'aburse que $u_n \leqslant u_{n+1}$, alors on aurait $P_n(u_n) \geqslant P_n(u_{n+1})$, ce qui contredit l'inégalité ci-dessus. Ainsi on a $u_n \geqslant u_{n+1}$.*
En conclusion, la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est décroissante.



Les graphes de P_2, P_3 et P_4 : les nombres u_2, u_3 et u_4 sont les abscisses où les courbes s'annulent. On voit que les fonctions sont bien décroissantes, et à x fixé, on a bien $P_4(x) \leqslant P_3(x) \leqslant P_2(x)$. On constate que les premiers termes de la suites décroissent.

3. La suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est croissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $\ell \in [0,1]$.
4. Supposons par l'absurde que $\ell \neq 0$. Alors, puisque $u_n^n \leqslant 1$, on a

$$u_n^n - nu_n + 1 \leqslant 2 - nu_n.$$

*. On pouvait aussi montrer, et la preuve est similaire, que la fonction réciproque d'une fonction décroissante continue est elle aussi strictement décroissante.

Or, puisque $\ell > 0$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} -nu_n = -\infty,$$
et on déduit par majoration des limites :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n^n - nu_n + 1 = -\infty.$$
Cela contredit $u_n^n - nu_n + 1 = 0$.

A retenir : Revenons sur les idées clefs de chaque question, typiques des suites définies “implicitement”.

1. On applique le théorème de la bijection à une fonction qui dépend de n. Un tableau de variation peut aider !
2. Question technique (faire un dessin), on mélange la monotonie de la fonction P_n et de la suite $(P_n(x))_{n\geqslant 2}$ à x fixé, en exploitant $P_n(u_n) = 0$ et $P_{n+1}(u_{n+1}) = 0$.
3. Le résultat de cours : des points facile à prendre même si on n'a pas bien réussi les questions précédentes.
4. La preuve, courte, de la question 4, semble peu naturelle. En fait, elle demande un “sens de l'analyse” : regardons l'équation $u_n^n - nu_n + 1 = 0$. Lorsque $n \to +\infty$, le terme $-nu_n$ tend vers $-\infty$, sauf si (u_n) tend vers 0, et ne peut pas être compensé par les autres termes (car $0 \leqslant u_n^n \leqslant 1$). Ainsi, $u_n^n - nu_n + 1$ ne peut pas valoir 0 lorsque n est grand, sauf si (u_n) tend vers 0.