Chapitre : Espace vectoriel

Exercice 1 : quelques calculs

1) Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

- **a)** L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$;
- **b)** L'ensemble des fonctions continues qui s'annulent en π ;
- **c)** L'ensemble des fonctions telles que $f(\pi) = 3$;
- **d)** L'ensemble des fonctions croissantes ;
- **e)** L'ensemble des fonctions monotones;
- **f)** L'ensemble des fonctions π-périodiques ;
- **g)** L'ensemble des fonctions paires ;
- **h)** L'ensemble des fonctions bornées ;
- **i)** L'ensemble des fonctions majorées.

2) Parmi les ensembles F suivants, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de l'espace E :

- **a)** $F = \{(x, y, z) \mid 2x + y + 4z = 1\}$ avec $E = \mathbb{R}^3$;
- **b)** $F = \{(x, y, z, t) \mid 2x + y + 4z = 1\}$ avec $E = \mathbb{R}^4$;
- **c)** $F = \{(x, y, z) \mid x - y + 3z = 0\}$ avec $E = \mathbb{R}^3$;
- **d)** $F = \{(x, y, z) \mid 5x - 3y + 2z \geq 0\}$ avec $E = \mathbb{R}^3$;
- **e)** $F = \{(x, y, z) \mid x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xy - 4yz \geq 0\}$ avec $E = \mathbb{R}^3$;
- **f)** $F = \{(x, y, z) \mid x = yz\}$ avec $E = \mathbb{R}^3$.

Exercice 2 : (*Cf.* cours)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On veut montrer que : $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si ($F \subset G$ ou $G \subset F$).

1) Supposons $F \subset G$ (resp. $G \subset F$) quel est l'ensemble $F \cup G$? Conclure

2) Montrons à présent que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E implique ($F \subset G$ ou $G \subset F$).
Raisonnons par contraposition et supposons non($F \subset G$ ou $G \subset F$).

- **a)** Traduire avec des quantificateurs non($F \subset G$ ou $G \subset F$)
- **b)** Conclure en utilisant l'égalité (dans un e.v.) : $x = (x + y) + (-y)$

Exercice 3 :

Soient $E = \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $e_1 = (1, 2, 1)$ et $e_2 = (1, 0, \alpha)$

1) (e_1, e_2) est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^3$?

2) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $e_3 = (-3, -10, 1) \notin \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

3) Qu'en déduire dans ce cas pour la famille (e_1, e_2, e_3) ?

Exercice 4 :

Soit E un espace vectoriel. Les familles suivantes sont-elles libres ? Génératrices de E ?

- **a)** $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (1, -1, -1)$, $e_3 = (2, 1, 1)$, $e_4 = (7, -5, 18)$ avec $E = \mathbb{R}^3$.
- **b)** $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (1, -1, -1)$, $e_3 = (2, 1, 1)$ avec $E = \mathbb{R}^3$.

Exercice 5 :

Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une famille libre. Les familles suivantes sont-elles libres ?

- **a)** $(e_1, -e_4, e_3)$
- **b)** (e_1, e_4)
- **c)** (e_1)
- **d)** $(2e_1 - e_2, e_2 + e_3, e_3 - e_4, e_4)$
- **e)** $(e_2 + e_3, e_3, e_4, -e_2 + 2e_3)$

Exercice 6 :

1) Déterminer une base du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ où
$F = \mathrm{Vect}\big((0, 3, 2, 1), (2, -2, -6, 4), (4, 5, 4, 3), (2, 1, 1, 1)\big)$.

2) Déterminer une base du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ où
$F = \mathrm{Vect}\big((1, 2, -1, 1), (3, -1, 2, 1), (1, -5, 4, -1), (3, -8, 7, -1), (-4, 20, -16, 4)\big)$.

Exercice 7 :

Soient $e_1 = (-2\,,1\,,1)$, $e_2 = (1\,,-2\,,-3)$, $e_3 = (1\,,4\,,7)$, $e_4 = (1\,,1\,,2)$

1) (e_1, e_2, e_3, e_4) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
2) (e_1, e_2) est-elle une base de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$?
3) Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$.

Exercice 8 :

On se propose dans cet exercice de « comparer » (en quel sens ?) dans $\mathbb{R}^4$ les espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}\big((1\,,0\,,1\,,1), (1\,,2\,,-3\,,1), (3\,,4\,,-3\,,4)\big)$ et $G = \mathrm{Vect}\big((8\,,14\,,-16\,,10), (4\,,2\,,2\,,5)\big)$ de deux manières différentes.

Méthode 1 :

1) Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant F.
2) En déduire la « comparaison ».

Méthode 2 :

1) Essayer d'exprimer les vecteurs générateurs de G comme combinaisons linéaires de ceux de F.
2) Conclure.

Exercice 9 :

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$

Soit $F = \mathrm{Vect}(I, M, M^2)$

1) Montrer que la famille (I, M, M^2) est libre.
2) En déduire que la famille (I, M, M^2) est une base de F.

Exercice 10 :

Soient $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\}$ et $G = \{(\lambda + \mu, -2\lambda - \mu, \lambda - \mu) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

1) F et G sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?
2) Déterminer $F \cap G$.
3) A-t-on $E = F + G$?
4) A-t-on $E = F \oplus G$?
5) Comment aurait-on pu poser la question **Q4** en « français » ?

Exercice 11 :

Soient $E = \mathbb{R}^3$, $e_1 = (3\,,2\,,-3)$, $e_2 = (1\,,4\,,1)$, $e_3 = (-1\,,-14, -7)$ et $e_4 = (10\,,0\,,-14)$

1) A-t-on : $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$?
2) Ecrire $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ sous la forme d'une ou plusieurs équations cartésiennes.
3) Donner un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Est-ce un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(e_3, e_4)$?

Exercice 12 :

Soient $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = -z\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + 2z = 0\}$.

1) Déterminer une base de F et une base de G.
2) F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 13 :

Soient $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z - 2t = 0, 3x + y + z - t = 0, x - y - z - 5t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \mid x + 3y + 4t = 0\}$.

1) Déterminer une base de F et une base de G.
2) F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
3) Donner un espace vectoriel supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^4$.
4) Comment procèderiez-vous si l'on vous demandait un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.