

Feuille d'exercices 20

Applications linéaires

— **Exercice 1** ●○○ — **Noyau et image d'applications linéaires de \mathbb{R}^3** Soit la fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par

$$u : (x, y, z) \mapsto (y - x, 2y + z - 3x, -y + 2x).$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$. Que dire de u ?

Faire de même avec la fonction

$$v : (x, y, z) \mapsto (x + y - 2z, -2x + y + z, x - 2y + z).$$

— **Exercice 2** ●○○ — **Applications linéaires, noyaux et rangs** Montrer que les applications suivantes, toutes notées u , sont linéaires, puis déterminer leur noyau et leur image.

1. La fonction de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^4 définie par

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-3x_1 + 2x_2 + x_3, -4x_1 + x_3 + x_4, -x_1 - 2x_2 + x_4, 8x_2 + x_3 - 3x_4).$$

2. La fonction de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$ définie par $P \mapsto P(X^2)$.
3. La fonction de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ définie par $P \mapsto X^2P' - 2XP$.
4. La fonction de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie par $M \mapsto AM - MA$, où $A \in M_2(\mathbb{R})$ est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Les coefficients de A ont-ils joué ?

Correction :

Méthode :

1. Clairement linéaire, assez pénible à montrer, on peut représenter la fonction par une matrice.
2. Ne pas se laisser bernier par la présence de X^2 . Pour le noyau : il est direct que $\ker f = \{0\}$. Pour l'image, on peut utiliser le transport d'une base canonique, ou voir que $P(X^2)$ est un polyôme pair.

3. Standard.

4. Vu en cours, découle directement de la distributivité du produit matriciel. Pour le noyaux, résoudre un système.

Détails :

1. Le noyau se trouve en résolvant le système $f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = 0$ par exemple par pivot, on en trouve facilement une base et sa dimension. L'image peut se trouver par transport de la base canonique.
2. Il est direct que u est linéaire. De plus,

$$P \in \ker u \iff P(X^2) = 0 \iff P = 0$$

et donc $\ker u = \{0\}$.

L'image se trouve par transport de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$:

$$\text{Im } u = \text{Vect}(u(1), u(X), \dots, u(X^n)) = \text{Vect}(1, X^2, \dots, X^{2n}).$$

La famille $(1, X^2, \dots, X^{2n})$ est clairement libre car de degrés échelonnés. C'est donc une base de $\text{Im } u$, et donc la dimension de $\text{Im } u$ est $n + 1$ (ce qui est cohérent avec le théorème du rang).

3. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors on a

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= X^2(\lambda P + \mu Q)' - 2X(\lambda P + \mu Q) \\ &= X^2(\lambda P' + \mu Q') - 2X\lambda P - 2X\mu Q \\ &= \lambda(X^2P' - 2XP) + \mu(X^2Q' - 2XQ) = \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

Cela prouve que u est linéaire.

Pour trouver le noyau, on résout

$$u(P) = 0 \iff X^2P' - 2XP = 0 \iff XP' - 2P = 0.$$

En analysant le coefficient dominant a_n de P , on obtient $na_n - 2a_n = 0$ et donc $n = 2$. On cherche ainsi P sous la forme $P = a_2X^2 + a_1X + a_0$, et on obtient

$$u(P) = 0 \iff 2a_2X^2 + a_1X - 2(a_2X^2 + a_1X + a_0) = 0$$

soit en identifiant les coefficients : $a_1 = a_0 = 0$. Finalement,

$$P \in \ker u \iff P = a_2X^2$$

et donc

$$\ker u = \text{Vect}(X^2).$$

En particulier $\dim \ker u = 1$. Pour trouver l'image, on peut transporter la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$:

$$\text{Im } u = \text{Vect}(u(1), u(X), \dots, u(X^n)).$$

Or on a

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad u(X^k) = (k-2)X^{k+1}.$$

Cela prouve que

$$\text{Im } u = \text{Vect}((k-2)X^{k+1})_{0 \leq k \leq n} = \text{Vect}((X^{k+1})_{k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket \setminus \{2\}}) = \text{Vect}(X, X^3, X^4, \dots, X^{n+1}).$$

En particulier, $\dim(\text{Im } u) = n$, ce qui est cohérent avec le théorème du rang.

$$= (x + y - z, z)$$

Remarque : On pouvait aussi utiliser le calcul matriciel. On introduit pour cela la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , qui consiste à écrire les vecteurs (f_i) en colonne (puisque \mathcal{B} est la base canonique) :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a en fait calculé son inverse lorsque l'on exprimé \mathcal{B} en fonction de \mathcal{B}' :

$$P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Notons \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^2 . Alors l'application linéaire est définie par les $u(f_i)$ dans la base canonique de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire par sa matrice dans les bases \mathcal{B}' et \mathcal{C} :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

On applique alors la formule de changement de base pour connaître la matrice de u dans les bases canoniques \mathcal{B} et \mathcal{C} :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = B = Q^{-1}AP,$$

avec $Q = I_3$ (on ne change pas la base d'arrivée) et $P = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ qui a été calculée. On obtient en faisant le produit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien que $u(x, y, z) = (x + y - z, z)$.

Cette méthode semble plus longue, parceque vous débutez. En fait on pourrait faire un même changement de base pour plusieurs applications linéaires données dans \mathcal{B}' (il suffit de calculer P), de plus elle ramène tout au simple calcul matriciel.

3. Standard

— **Exercice 3** ●○○ — **Applications linéaires définies par trois images**

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

$$u(0, 1, 1) = (0, 1), \quad u(1, 1, 1) = (1, 1) \quad \text{et} \quad u(0, 1, 0) = (1, 0).$$

2. Déterminer l'image par u d'un vecteur (x, y, z) .

3. Déterminer $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$.

Correction :

1. Il suffit de vérifier que les trois vecteurs $f_1 = (0, 1, 1)$, $f_2 = (1, 1, 1)$ et $f_3 = (0, 1, 0)$, dont on connaît les images, forment une base de \mathbb{R}^3 . On peut montrer manuellement qu'ils forment une famille libre, mais on peut aussi calculer leur produit mixte :

$$[f_1, f_2, f_3] = (f_1 \wedge f_2) \cdot f_3 = 1 \neq 0,$$

ce qui prouve que la famille $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Une application linéaire étant définie de manière unique par ses images sur une base, cela répond à la question.

2. On va chercher à exprimer le vecteur (x, y, z) dans la base \mathcal{B}' . Pour cela, il suffit d'exprimer les vecteurs e_1, e_2 et e_3 de la base canonique \mathcal{B} dans la base \mathcal{B}' . On a

$$e_1 = f_2 - f_1, \quad e_2 = f_3 \quad \text{et} \quad e_3 = f_1 - f_3.$$

Ainsi, on a

$$(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3 = (-x + z)f_1 + xf_2 + (y - z)f_3.$$

On peut maintenant calculer, en utilisant la linéarité de f et les données des $u(f_1)$, $u(f_2)$ et $u(f_3)$:

$$u(x, y, z) = (-x + z)u(f_1) + xu(f_2) + (y - z)u(f_3) = (0, -x + z) + (x, x) + (y - z, 0)$$

— **Exercice 4** ●○○ — **Application linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3** Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de \mathbb{R}^4 et (f_1, f_2, f_3) celle de \mathbb{R}^3 .

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $u : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que

$$u(e_1) = f_1 - f_3, \quad u(e_2) = f_1 - f_2 + f_3, \quad u(e_3) = 2f_1 + 2f_2 \quad \text{et} \quad u(e_4) = 3f_1 + 2f_2 - f_3.$$

- Déterminer l'image d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^4$ de coordonnées dans la base canonique (x_1, x_2, x_3, x_4) (Si on a acquis le calcul matriciel, on peut l'utiliser!).
- Déterminer une base de $\ker(u)$. L'application est-elle injective?
- En déduire $\text{Im}(u)$. L'application est-elle surjective?

— Exercice 5 ●●○ — Sommes directes (ou pas)

- Soit u la fonction de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^4 définie par

$$u : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 - x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_4).$$

A-t-on $\mathbb{R}^4 = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$?

- Soit v la fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par

$$v : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (4x_1 - 2x_2 + 4x_3, x_1 - x_3, 4x_1 - 2x_2 + 4x_3).$$

A-t-on $\mathbb{R}^3 = \ker(v) \oplus \text{Im}(v)$?

— Exercice 6 ●●○ — Fonctions somme des coordonnées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit u la fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} définie par

$$u : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k.$$

- Montrer que u est une application linéaire. Est-elle injective? surjective?
- Déterminer une base de $\ker(u)$ et en déduire $\text{rg}(u)$.

— Exercice 7 ●●○ — Image et noyau de la composée

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$:

- Montrer que $\ker(u) \subset \ker(u^2)$.
- Montrer que $\text{Im}(u^2) \subset \text{Im}(u)$.
- Montrer que $\ker(u) = \ker(u^2) \iff \ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$.

Correction :

Méthode :

- Bien avoir en tête que $u^2 = u \circ u$. Que vaut $u(0)$ pour une application linéaire?
- Bien avoir en tête que $u^2 = u \circ u$.
- Procéder par double implication. Pour la réciproque : quand on écrit $u(u(x)) = 0$, qui est à la fois dans $\ker u$ et $\text{Im} u$?

Détails :

- Soit $x \in \ker u$, on a alors $u(x) = 0$, et donc $u^2(x) = u(u(x)) = u(0) = 0$ car u est linéaire. On a donc $x \in \ker u^2$. Cela prouve $\ker u \subset \ker u^2$.
- Soit $y \in \text{Im} u^2$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^2(x) = u(u(x))$. Posons $x' = u(x)$, alors $y = u(x') \in \text{Im} u$. Cela prouve $\text{Im} u^2 \subset \text{Im} u$.
- On raisonne par double implication :
 - Montrons que $\ker(u) = \ker(u^2) \implies \ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$:
Supposons $\ker(u) = \ker(u^2)$. Soit $y \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$, car $y \in \text{Im} u$. Or on a aussi $y \in \ker u$, donc $0 = u(y) = u(u(x)) = u^2(x)$, et donc $x \in \ker u^2$. Mais $\ker(u) = \ker(u^2)$, donc $x \in \ker u$, et $0 = u(x) = y$. Cela prouve que $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$.
 - Montrons que $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\} \implies \ker(u) = \ker(u^2)$:
Supposons $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$. On sait déjà que $\ker u \subset \ker u^2$, on doit montrer l'inclusion réciproque. Soit $x \in \ker u^2$, c'est-à-dire $u(u(x)) = 0$. On pose $y = u(x)$, alors $u(y) = 0$ donc $y \in \ker u$, et on a aussi $y \in \text{Im} u$ par définition de $\text{Im} u$. Or $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$, d'où $y = 0$, c'est-à-dire $u(x) = 0$, et donc $x \in \ker u$. Cela prouve que $\ker u^2 \subset \ker u$ et donc que $\ker u^2 = \ker u$.

— Exercice 8 ●●○ — Composée nulle

Soit E un espace vectoriel de dimension n , ainsi que u et v dans $\mathcal{L}(E)$.

- Montrer que $v \circ u = 0$ si et seulement si $\text{Im} u \subset \ker v$.
- Quand la condition précédente est vérifiée, montrer que $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq n$.

Correction :

Méthode :

- Raisonnement par double équivalence.
- Commencer par déduire de l'inclusion $\text{Im} u \subset \ker v$ une inégalité de dimension. Ensuite, quel théorème relie le rang et le noyau?

Détails :

- On raisonne par double implication :
 - Montrons que $v \circ u = 0 \implies \text{Im} u \subset \ker v$:
Supposons $v \circ u = 0$. Soit $y \in \text{Im} u$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On calcule $v(y)$: on a $v(y) = v(u(x)) = 0$ car $v \circ u = 0$, et donc $y \in \ker v$. Cela prouve que $\text{Im} u \subset \ker v$.
 - Montrons que $\text{Im} u \subset \ker v \implies v \circ u = 0$:
Supposons $\text{Im} u \subset \ker v$. Soit $x \in E$, par définition, $u(x) \in \text{Im} u$. Or $\text{Im} u \subset \ker v$. Donc $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = 0$. Comme cela est vrai pour tout $x \in E$, alors $v \circ u = 0$. Cela prouve que $\text{Im} u \subset \ker v \implies v \circ u = 0$.

2. L'inclusion $\text{Im } u \subset \ker v$ donne :

$$\dim \text{Im } u \leq \dim \ker v,$$

c'est-à-dire $\text{rg } u \leq \dim \ker v$ or le théorème du rang donne $\dim \ker v = n - \text{rg } v$, et donc

$$\text{rg } u + \text{rg } v \leq n.$$

— **Exercice 9** ●●○ — **Endomorphisme nilpotent** Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = 0$, et que n est minimal pour cette propriété (c'est-à-dire que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $u^k \neq 0$).

1. Dans le cas $E = \mathbb{R}^2$, donner un exemple d'un tel endomorphisme pour $n = 2$.
2. On revient au cas général. Montrer que $\text{Id} - u$ est bijective, et donner son inverse.

Correction :

1. On peut prendre l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, cette matrice vérifie $N^2 = N$. L'endomorphisme associé est définie par

$$u((x, y)) = (y, 0).$$

2. On peut s'inspirer de la formule, pour un réel $x \neq 1$:

$$\frac{1 - x^n}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}.$$

Ainsi, on pose

$$v = \sum_{k=0}^{n-1} u^k = \text{Id} + u + \dots + u^{n-1}.$$

On a alors, par télescopage :

$$v \circ (\text{Id} - u) = \sum_{k=0}^{n-1} u^k - \sum_{k=1}^n u^k = \text{Id} - u^n.$$

Or par hypothèse, $u^n = 0$, cela prouve que

$$v \circ (\text{Id} - u) = \text{Id}.$$

Comme $\text{Id} - u$ est un endomorphisme en dimension finie, cela prouve que $\text{Id} - u$ est bijective, de fonction réciproque v .

Remarque : L'argument concernant la dimension finie utilise un théorème de cours subtil, à savoir qu'il suffit d'avoir une réciproque "à droite" ou "à gauche" pour être bijective. Si cet argument vous effraie, vous pouvez simplement dire qu'on a par un calcul analogue $(\text{Id} - u) \circ v = \text{Id}$.

— **Exercice 10** ●●○ — **Endomorphisme de polynômes** Soit u défini sur $\mathbb{R}_3[X]$ par

$$u(P) = (X^2 + 1)P''.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $\text{Im}(u)$. Précisez la dimension de ces sous-espace vectoriels.

Correction :

Méthode :

1. Standard, on vérifie que u est à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$ (parler du degré), et que u est linéaire.

Détails :

1. Vérifions que u est à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$. Déjà, $u(P) \in \mathbb{R}[X]$. Si $\deg P \leq 1$, alors $u(P) = 0$, sinon on a

$$\deg(u(P)) = 2 + \deg(P'') = \deg P$$

d'où $u(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.

Montrons que u est linéaire. Soient P et Q dans $\mathbb{R}_3[X]$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors on a

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= (X^2 + 1)(\lambda P + \mu Q)'' \\ &= (X^2 + 1)(\lambda P'' + \mu Q'') \\ &= \lambda(X^2 + 1)P'' + \mu(X^2 + 1)Q'' \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q). \end{aligned}$$

ce qui prouve que u est linéaire.

Ainsi, u est linéaire, de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$, c'est donc un endomorphisme.

2. Pour déterminer $\ker u$, on résout l'équation $u(P) = 0$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Clairement

$$u(P) = 0 \iff P'' = 0 \iff P \in \mathbb{R}_1[X].$$

Ainsi, $\ker u = \mathbb{R}_1[X]$.

Pour déterminer $\text{Im } u$, on peut se servir du fait que $\text{Im } u$ est engendré par les images d'une base de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$\begin{aligned} \text{Im } u &= \text{Vect}(u(1), u(X), u(X^2), u(X^3)) = \text{Vect}(2(X^2 + 1), 6X(X^2 + 1)) \\ &= \text{Vect}(2X^2 + 2, 6X^3 + 6X) \end{aligned}$$

Il est clair que $(2X^2 + 2, 6X^3 + 6X)$ est une famille libre, car de degrés échellonnés, c'est donc une base de $\text{Im } u$.

On vérifie que $\dim(\ker u) + \text{rg } u = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$, ce qui est cohérent avec le théorème du rang.

— **Exercice 11** ●●○ — **Evaluation polynomiale en des points et interpolation**

Soit $n \in \mathbb{N}$, et soient $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ la donnée de $n + 1$ points distincts de \mathbb{R} . On définit $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ par

$$u(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n)).$$

1. Montrer que u est linéaire et injective.
2. En déduire que :

$$\forall (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \exists ! P \in \mathbb{R}_n[X], \text{ tel que } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_k) = b_k.$$

3. Ce polynôme P est appelé “polynôme interpolateur de degré n aux points (a_k, b_k) ”. Cela vous rappelle-t-il quelque chose ?

Correction :

Méthode :

Détails :

- 1.
- 2.
- 3.

— **Exercice 12** ●●○ — **Evaluation en deux points** Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par

$$u(P) = (P(2), P(3)).$$

1. On se place dans le cas $n = 1$. Déterminer une base de $\ker(u)$ et de $\text{Im}(u)$. La fonction u est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Même question pour $n = 2$.
3. Même question pour $n = 3$.
4. (Plus dur). On revient au cas $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Décrire $\ker(u)$.

Correction :

Méthode :

1. Un polynôme de degré 1 qui s’annule en deux points ?
2. Un polynôme de degré 2 qui s’annule en deux points ?
3. Un polynôme de degré 3 peut s’annuler en deux points, il a alors une troisième racine réelle.
4. Rappelez-vous : P s’annule en α si et seulement si... Quand on a deux racines, pensez à un critère de divisibilité pour justifier une factorisation.

Détails :

1. Soit $P \in \ker u$, alors $\deg P = 1$ et $P(2) = P(3) = 0$. Ainsi, P a plus de racines que son degré, d'où $P = 0$. Ainsi, $\ker u = \{0\}$, et u est injective. Puisque $\dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, la fonction est aussi surjective, et $\text{Im } u = \mathbb{R}^2$. On vient de retrouver : étant donné $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, par les deux points $(2, y_1)$ et $(3, y_2)$ passe un unique polynôme de degré au plus 1 (une droite).
2. Soit $P \in \ker u$, alors $\deg P = 2$ et $P(2) = P(3) = 0$. Ainsi, P est de la forme

$$P = \alpha(X - 2)(X - 3), \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, $\ker u = \text{Vect}((X - 2)(X - 3))$, et $\dim(\ker u) = 1$. Pour l'image, on peut commencer par trouver sa dimension. Le théorème du rang donne

$$\dim(\text{Im } u) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\ker u) = 3 - 1 = 2.$$

Puisque $\text{Im } u \subset \mathbb{R}^2$, on déduit que $\text{Im } u = \mathbb{R}^2$.

3. On adapte la question précédente.
4. On fait appel au cours sur les polynômes :

$$P \in \ker u \iff P(2) = P(3) = 0 \iff \exists Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X] \text{ tel que } P = (X - 2)(X - 3)Q$$

Notez la contrainte $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ qui vient du fait que $\deg P = n$. Ainsi, on a

$$\ker u = \{(X - 2)(X - 3)Q, Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]\}$$

On écrivant $Q = \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k$ on obtient

$$\ker u = \{(X - 2)(X - 3), (X - 2)(X - 3)X, \dots, (X - 2)(X - 3)X^{n-2}\}$$

et on déduit une base de $\ker u$ puisque la famille ci-dessus est libre, car de degrés échelonnés. On a donc $\dim(\ker u) = n - 1$.

Pour les plus savants, on peut remarquer que la fonction $Q \mapsto (X - 2)(X - 3)Q$ est un isomorphisme entre $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ et $\ker u$.

— **Exercice 13** ●●○ — **Endomorphisme avec la transposée** Soit $u : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$u(M) = M - M^T.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Quel nom et notation a-t-on donné pour $\ker(u)$ dans le chapitre sur les matrices ?
3. Retrouver la dimension de $\ker(u)$, en donner une base. Faire de même pour $\text{Im}(u)$.

Correction :

1. La fonction u étant clairement à valeurs dans $M_3(\mathbb{R})$, il suffit de montrer qu'elle est linéaire. Pour M_1 et M_2 dans $M_3(\mathbb{R})$, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} u(\alpha M_1 + \beta M_2) &= (\alpha M_1 + \beta M_2) - (\alpha M_1 + \beta M_2)^T \\ &= \alpha M_1 + \beta M_2 - (\alpha M_1^T + \beta M_2^T) \\ &= \alpha (M_1 - M_1^T) + \beta (M_2 - M_2^T) \\ &= \alpha u(M_1) + \beta u(M_2) \end{aligned}$$

ce qui prouve que u est linéaire, et donc que c'est un endomorphisme de $M_3(\mathbb{R})$.

2. On a

$$M \in \ker u \iff u(M) = 0 \iff M - M^T = 0 \iff M = M^T.$$

En d'autres termes, M est dans $\ker u$ si et seulement si M est une matrice symétrique de $M_3(\mathbb{R})$.

3. La description des matrices symétriques a été vue dans le chapitre sur la dimension : l'ensemble des matrices symétriques de taille n est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, et donc ici c'est un sous-espace vectoriel de dimension 6. Une base en est donné par la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Pour trouver $\text{Im}(u)$, on peut déterminer les images de la base canonique (E_{ij}) par u , puisque on sait que $\text{Im } u = \text{Vect} \left((E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} \right)$ on trouve :

$$u(E_{11}) = u(E_{22}) = u(E_{33}) = 0,$$

tandis que

$$u(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -u(E_{21}),$$

$$u(E_{13}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -u(E_{31})$$

et

$$u(E_{23}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -u(E_{32})$$

Ainsi,

$$\text{Im } u = \text{Vect}(E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32}).$$

On reconnaît une base de l'ensemble des matrices antisymétriques, donc $\text{rg } u = 3$. ceci est en accord avec le théorème du rang :

$$\dim(\ker(u)) + \text{rg}(u) = 6 + 3 = 9 = \dim(M_3(\mathbb{R})).$$

Remarque : une solution qui ignore le fait qu'une base est transportée par u sur une famille génératrice de $\text{Im } u$, et qui passe facilement pour des matrices de taille n , est la suivante : on se donne $A \in M_3(\mathbb{R})$, et on cherche des conditions sur A pour que l'équation

$$A = u(M)$$

possède une solution $M \in M_3(\mathbb{R})$. Or

$$A = u(M) \iff A = M - M^T.$$

Il paraît logique de transposer cette équation :

$$A = u(M) \iff A^T = (M - M^T)^T = M^T - (M^T)^T = M^T - M.$$

En additionnant ces deux relations, on obtient

$$A + A^T = 0,$$

c'est-à-dire que A est antisymétrique. Réciproquement, si A est antisymétrique, on peut écrire

$$A = u\left(\frac{A}{2}\right),$$

ce qui prouve que $A \in \text{Im}(u)$.

— **Exercice 14** ●●● — **Endomorphisme avec la dérivée : lien avec une équation différentielle** Soit $u : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par

$$u : f \mapsto f'' + f' - 2f.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\ker u$ et sa dimension.
3. La fonction $x \mapsto \sin x$ appartient-elle à $\text{Im } u$?
4. Déterminer $\ker(u) \cap \text{Im}(u)$.