

# Feuille d'exercices 20

## Applications linéaires

— **Exercice 1** ●○○ — **Noyau et image d'applications linéaires de  $\mathbb{R}^3$**  Soit la fonction de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$u : (x, y, z) \mapsto (y - x, 2y + z - 3x, -y + 2x).$$

1. Montrer que  $u$  est une application linéaire.
2. Déterminer  $\ker(u)$  et  $\text{Im}(u)$ . Que dire de  $u$  ?

Faire de même avec la fonction

$$v : (x, y, z) \mapsto (x + y - 2z, -2x + y + z, x - 2y + z).$$

— **Exercice 2** ●○○ — **Applications linéaires, noyaux et rangs** Montrer que les applications suivantes, toutes notées  $u$ , sont linéaires, puis déterminer leur noyau et leur image.

1. La fonction de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^4$  définie par

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-3x_1 + 2x_2 + x_3, -4x_1 + x_3 + x_4, -x_1 - 2x_2 + x_4, 8x_2 + x_3 - 3x_4).$$

2. La fonction de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}_{2n}[X]$  définie par  $P \mapsto P(X^2)$ .
3. La fonction de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}_{n+1}[X]$  définie par  $P \mapsto X^2P' - 2XP$ .
4. La fonction de  $M_2(\mathbb{R})$  dans  $M_2(\mathbb{R})$  définie par  $M \mapsto AM - MA$ , où  $A \in M_2(\mathbb{R})$  est donnée par  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ . Les coefficients de  $A$  ont-ils joué ?

**Correction :**

**Méthode :**

1. Clairement linéaire, assez pénible à montrer, on peut représenter la fonction par une matrice.
2. Ne pas se laisser bernier par la présence de  $X^2$ . Pour le noyau : il est direct que  $\ker f = \{0\}$ . Pour l'image, on peut utiliser le transport d'une base canonique, ou voir que  $P(X^2)$  est un polyôme pair.

3. Standard.

4. Vu en cours, découle directement de la distributivité du produit matriciel. Pour le noyaux, résoudre un système.

**Détails :**

1. Le noyau se trouve en résolvant le système  $f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = 0$  par exemple par pivot, on en trouve facilement une base et sa dimension. L'image peut se trouver par transport de la base canonique.
2. Il est direct que  $u$  est linéaire. De plus,

$$P \in \ker u \iff P(X^2) = 0 \iff P = 0$$

et donc  $\ker u = \{0\}$ .

L'image se trouve par transport de la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$  :

$$\text{Im } u = \text{Vect}(u(1), u(X), \dots, u(X^n)) = \text{Vect}(1, X^2, \dots, X^{2n}).$$

La famille  $(1, X^2, \dots, X^{2n})$  est clairement libre car de degrés échelonnés. C'est donc une base de  $\text{Im } u$ , et donc la dimension de  $\text{Im } u$  est  $n + 1$  (ce qui est cohérent avec le théorème du rang).

3. Soient  $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ , alors on a

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= X^2(\lambda P + \mu Q)' - 2X(\lambda P + \mu Q) \\ &= X^2(\lambda P' + \mu Q') - 2X\lambda P - 2X\mu Q \\ &= \lambda(X^2P' - 2XP) + \mu(X^2Q' - 2XQ) = \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

Cela prouve que  $u$  est linéaire.

Pour trouver le noyau, on résout

$$u(P) = 0 \iff X^2P' - 2XP = 0 \iff XP' - 2P = 0.$$

En analysant le coefficient dominant  $a_n$  de  $P$ , on obtient  $na_n - 2a_n = 0$  et donc  $n = 2$ . On cherche ainsi  $P$  sous la forme  $P = a_2X^2 + a_1X + a_0$ , et on obtient

$$u(P) = 0 \iff 2a_2X^2 + a_1X - 2(a_2X^2 + a_1X + a_0) = 0$$

soit en identifiant les coefficients :  $a_1 = a_0 = 0$ . Finalement,

$$P \in \ker u \iff P = a_2X^2$$

et donc

$$\ker u = \text{Vect}(X^2).$$

En particulier  $\dim \ker u = 1$ . Pour trouver l'image, on peut transporter la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$  :

$$\text{Im } u = \text{Vect}(u(1), u(X), \dots, u(X^n)).$$

Or on a

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad u(X^k) = (k-2)X^{k+1}.$$

Cela prouve que

$$\text{Im } u = \text{Vect}((k-2)X^{k+1})_{0 \leq k \leq n} = \text{Vect}((X^{k+1})_{k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket \setminus \{2\}}) = \text{Vect}(X, X^3, X^4, \dots, X^{n+1}).$$

En particulier,  $\dim(\text{Im } u) = n$ , ce qui est cohérent avec le théorème du rang.

$$= (x + y - z, z)$$

**Remarque** : On pouvait aussi utiliser le calcul matriciel. On introduit pour cela la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ , qui consiste à écrire les vecteurs  $(f_i)$  en colonne (puisque  $\mathcal{B}$  est la base canonique) :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a en fait calculé son inverse lorsque l'on exprimé  $\mathcal{B}$  en fonction de  $\mathcal{B}'$  :

$$P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Notons  $\mathcal{C}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Alors l'application linéaire est définie par les  $u(f_i)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire par sa matrice dans les bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{C}$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

On applique alors la formule de changement de base pour connaître la matrice de  $u$  dans les bases canoniques  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = B = Q^{-1}AP,$$

avec  $Q = I_3$  (on ne change pas la base d'arrivée) et  $P = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$  qui a été calculée. On obtient en faisant le produit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien que  $u(x, y, z) = (x + y - z, z)$ .

Cette méthode semble plus longue, parceque vous débutez. En fait on pourrait faire un même changement de base pour plusieurs applications linéaires données dans  $\mathcal{B}'$  (il suffit de calculer  $P$ ), de plus elle ramène tout au simple calcul matriciel.

**3. Standard**

— **Exercice 3** ●○○ — **Applications linéaires définies par trois images**

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que

$$u(0, 1, 1) = (0, 1), \quad u(1, 1, 1) = (1, 1) \quad \text{et} \quad u(0, 1, 0) = (1, 0).$$

2. Déterminer l'image par  $u$  d'un vecteur  $(x, y, z)$ .

3. Déterminer  $\ker(u)$  et  $\text{Im}(u)$ .

**Correction :**

1. Il suffit de vérifier que les trois vecteurs  $f_1 = (0, 1, 1)$ ,  $f_2 = (1, 1, 1)$  et  $f_3 = (0, 1, 0)$ , dont on connaît les images, forment une base de  $\mathbb{R}^3$ . On peut montrer manuellement qu'ils forment une famille libre, mais on peut aussi calculer leur produit mixte :

$$[f_1, f_2, f_3] = (f_1 \wedge f_2) \cdot f_3 = 1 \neq 0,$$

ce qui prouve que la famille  $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Une application linéaire étant définie de manière unique par ses images sur une base, cela répond à la question.

2. On va chercher à exprimer le vecteur  $(x, y, z)$  dans la base  $\mathcal{B}'$ . Pour cela, il suffit d'exprimer les vecteurs  $e_1, e_2$  et  $e_3$  de la base canonique  $\mathcal{B}$  dans la base  $\mathcal{B}'$ . On a

$$e_1 = f_2 - f_1, \quad e_2 = f_3 \quad \text{et} \quad e_3 = f_1 - f_3.$$

Ainsi, on a

$$(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3 = (-x + z)f_1 + xf_2 + (y - z)f_3.$$

On peut maintenant calculer, en utilisant la linéarité de  $f$  et les données des  $u(f_1)$ ,  $u(f_2)$  et  $u(f_3)$  :

$$u(x, y, z) = (-x + z)u(f_1) + xu(f_2) + (y - z)u(f_3) = (0, -x + z) + (x, x) + (y - z, 0)$$

— **Exercice 4** ●○○ — **Application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$**  Soit  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  et  $(f_1, f_2, f_3)$  celle de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire  $u : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que

$$u(e_1) = f_1 - f_3, \quad u(e_2) = f_1 - f_2 + f_3, \quad u(e_3) = 2f_1 + 2f_2 \quad \text{et} \quad u(e_4) = 3f_1 + 2f_2 - f_3.$$

- Déterminer l'image d'un vecteur  $x \in \mathbb{R}^4$  de coordonnées dans la base canonique  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  (Si on a acquis le calcul matriciel, on peut l'utiliser!).
- Déterminer une base de  $\ker(u)$ . L'application est-elle injective?
- En déduire  $\text{Im}(u)$ . L'application est-elle surjective?

— **Exercice 5** ●●○ — **Sommets directes (ou pas)**

- Soit  $u$  la fonction de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^4$  définie par

$$u : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 - x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_4).$$

A-t-on  $\mathbb{R}^4 = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$ ?

- Soit  $v$  la fonction de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$v : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (4x_1 - 2x_2 + 4x_3, x_1 - x_3, 4x_1 - 2x_2 + 4x_3).$$

A-t-on  $\mathbb{R}^3 = \ker(v) \oplus \text{Im}(v)$ ?

— **Exercice 6** ●●○ — **Fonctions somme des coordonnées** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et soit  $u$  la fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$u : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k.$$

- Montrer que  $u$  est une application linéaire. Est-elle injective? surjective?
- Déterminer une base de  $\ker(u)$  et en déduire  $\text{rg}(u)$ .

— **Exercice 7** ●●○ — **Image et noyau de la composée** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$  :

- Montrer que  $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ .
- Montrer que  $\text{Im}(u^2) \subset \text{Im}(u)$ .
- Montrer que  $\ker(u) = \ker(u^2) \iff \ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$ .

**Correction :**

**Méthode :**

- Bien avoir en tête que  $u^2 = u \circ u$ . Que vaut  $u(0)$  pour une application linéaire?
- Bien avoir en tête que  $u^2 = u \circ u$ .
- Procéder par double implication. Pour la réciproque : quand on écrit  $u(u(x)) = 0$ , qui est à la fois dans  $\ker u$  et  $\text{Im} u$ ?

**Détails :**

- Soit  $x \in \ker u$ , on a alors  $u(x) = 0$ , et donc  $u^2(x) = u(u(x)) = u(0) = 0$  car  $u$  est linéaire. On a donc  $x \in \ker u^2$ . Cela prouve  $\ker u \subset \ker u^2$ .
- Soit  $y \in \text{Im} u^2$ , alors il existe  $x \in E$  tel que  $y = u^2(x) = u(u(x))$ . Posons  $x' = u(x)$ , alors  $y = u(x') \in \text{Im} u$ . Cela prouve  $\text{Im} u^2 \subset \text{Im} u$ .
- On raisonne par double implication :
  - Montrons que  $\ker(u) = \ker(u^2) \implies \ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$  :  
Supposons  $\ker(u) = \ker(u^2)$ . Soit  $y \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$ . Alors il existe  $x \in E$  tel que  $y = u(x)$ , car  $y \in \text{Im} u$ . Or on a aussi  $y \in \ker u$ , donc  $0 = u(y) = u(u(x)) = u^2(x)$ , et donc  $x \in \ker u^2$ . Mais  $\ker(u) = \ker(u^2)$ , donc  $x \in \ker u$ , et  $0 = u(x) = y$ . Cela prouve que  $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$ .
  - Montrons que  $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\} \implies \ker(u) = \ker(u^2)$  :  
Supposons  $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$ . On sait déjà que  $\ker u \subset \ker u^2$ , on doit montrer l'inclusion réciproque. Soit  $x \in \ker u^2$ , c'est-à-dire  $u(u(x)) = 0$ . On pose  $y = u(x)$ , alors  $u(y) = 0$  donc  $y \in \ker u$ , et on a aussi  $y \in \text{Im} u$  par définition de  $\text{Im} u$ . Or  $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$ , d'où  $y = 0$ , c'est-à-dire  $u(x) = 0$ , et donc  $x \in \ker u$ . Cela prouve que  $\ker u^2 \subset \ker u$  et donc que  $\ker u^2 = \ker u$ .

— **Exercice 8** ●○○ — **Composée nulle** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ , ainsi que  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{L}(E)$ .

- Montrer que  $v \circ u = 0$  si et seulement si  $\text{Im} u \subset \ker v$ .
- Quand la condition précédente est vérifiée, montrer que  $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq n$ .

**Correction :**

**Méthode :**

- Raisonnement par double équivalence.
- Commencer par déduire de l'inclusion  $\text{Im} u \subset \ker v$  une inégalité de dimension. Ensuite, quel théorème relie le rang et le noyau?

**Détails :**

- On raisonne par double implication :
  - Montrons que  $v \circ u = 0 \implies \text{Im} u \subset \ker v$  :  
Supposons  $v \circ u = 0$ . Soit  $y \in \text{Im} u$ . Alors il existe  $x \in E$  tel que  $y = u(x)$ . On calcule  $v(y)$  : on a  $v(y) = v(u(x)) = 0$  car  $v \circ u = 0$ , et donc  $y \in \ker v$ . Cela prouve que  $\text{Im} u \subset \ker v$ .
  - Montrons que  $\text{Im} u \subset \ker v \implies v \circ u = 0$  :  
Supposons  $\text{Im} u \subset \ker v$ . Soit  $x \in E$ , par définition,  $u(x) \in \text{Im} u$ . Or  $\text{Im} u \subset \ker v$ . Donc  $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = 0$ . Comme cela est vrai pour tout  $x \in E$ , alors  $v \circ u = 0$ . Cela prouve que  $\text{Im} u \subset \ker v \implies v \circ u = 0$ .

2. L'inclusion  $\text{Im } u \subset \ker v$  donne :

$$\dim \text{Im } u \leq \dim \ker v,$$

c'est-à-dire  $\text{rg } u \leq \dim \ker v$  or le théorème du rang donne  $\dim \ker v = n - \text{rg } v$ , et donc

$$\text{rg } u + \text{rg } v \leq n.$$

— **Exercice 9** ●●○ — **Endomorphisme nilpotent** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^n = 0$ , et que  $n$  est minimal pour cette propriété (c'est-à-dire que pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on a  $u^k \neq 0$ ).

1. Dans le cas  $E = \mathbb{R}^2$ , donner un exemple d'un tel endomorphisme pour  $n = 2$ .

2. On revient au cas général. Montrer que  $\text{Id} - u$  est bijective, et donner son inverse.

**Correction :**

1. On peut prendre l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, cette matrice vérifie  $N^2 = N$ . L'endomorphisme associé est définie par

$$u((x, y)) = (y, 0).$$

2. On peut s'inspirer de la formule, pour un réel  $x \neq 1$  :

$$\frac{1 - x^n}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}.$$

Ainsi, on pose

$$v = \sum_{k=0}^{n-1} u^k = \text{Id} + u + \dots + u^{n-1}.$$

On a alors, par télescopage :

$$v \circ (\text{Id} - u) = \sum_{k=0}^{n-1} u^k - \sum_{k=1}^n u^k = \text{Id} - u^n.$$

Or par hypothèse,  $u^n = 0$ , cela prouve que

$$v \circ (\text{Id} - u) = \text{Id}.$$

Comme  $\text{Id} - u$  est un endomorphisme en dimension finie, cela prouve que  $\text{Id} - u$  est bijective, de fonction réciproque  $v$ .

**Remarque :** L'argument concernant la dimension finie utilise un théorème de cours subtil, à savoir qu'il suffit d'avoir une réciproque "à droite" ou "à gauche" pour être bijective. Si cet argument vous effraie, vous pouvez simplement dire qu'on a par un calcul analogue  $(\text{Id} - u) \circ v = \text{Id}$ .

— **Exercice 10** ●●○ — **Endomorphisme de polynômes** Soit  $u$  défini sur  $\mathbb{R}_3[X]$  par

$$u(P) = (X^2 + 1)P''.$$

1. Montrer que  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

2. Déterminer une base de  $\ker(u)$  et une base de  $\text{Im}(u)$ . Précisez la dimension de ces sous-espace vectoriels.

**Correction :**

**Méthode :**

1. Standard, on vérifie que  $u$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_3[X]$  (parler du degré), et que  $u$  est linéaire.

**Détails :**

1. Vérifions que  $u$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_3[X]$ . Déjà,  $u(P) \in \mathbb{R}[X]$ . Si  $\deg P \leq 1$ , alors  $u(P) = 0$ , sinon on a

$$\deg(u(P)) = 2 + \deg(P'') = \deg P$$

d'où  $u(P) \in \mathbb{R}_3[X]$ .

Montrons que  $u$  est linéaire. Soient  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$ , et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ , alors on a

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= (X^2 + 1)(\lambda P + \mu Q)'' \\ &= (X^2 + 1)(\lambda P'' + \mu Q'') \\ &= \lambda(X^2 + 1)P'' + \mu(X^2 + 1)Q'' \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q). \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $u$  est linéaire.

Ainsi,  $u$  est linéaire, de  $\mathbb{R}_3[X]$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$ , c'est donc un endomorphisme.

2. Pour déterminer  $\ker u$ , on résout l'équation  $u(P) = 0$  d'inconnue  $P \in \mathbb{R}_3[X]$ . Clairement

$$u(P) = 0 \iff P'' = 0 \iff P \in \mathbb{R}_1[X].$$

Ainsi,  $\ker u = \mathbb{R}_1[X]$ .

Pour déterminer  $\text{Im } u$ , on peut se servir du fait que  $\text{Im } u$  est engendré par les images d'une base de  $\mathbb{R}_3[X]$  :

$$\begin{aligned} \text{Im } u &= \text{Vect}(u(1), u(X), u(X^2), u(X^3)) = \text{Vect}(2(X^2 + 1), 6X(X^2 + 1)) \\ &= \text{Vect}(2X^2 + 2, 6X^3 + 6X) \end{aligned}$$

Il est clair que  $(2X^2 + 2, 6X^3 + 6X)$  est une famille libre, car de degrés échellonnés, c'est donc une base de  $\text{Im } u$ .

On vérifie que  $\dim(\ker u) + \text{rg } u = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$ , ce qui est cohérent avec le théorème du rang.

— **Exercice 11** ●●○ — **Evaluation polynomiale en des points et interpolation**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , et soient  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  la donnée de  $n + 1$  points distincts de  $\mathbb{R}$ . On définit  $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  par

$$u(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n)).$$

1. Montrer que  $u$  est linéaire et injective.
2. En déduire que :

$$\forall (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \exists ! P \in \mathbb{R}_n[X], \text{ tel que } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_k) = b_k.$$

3. Ce polynôme  $P$  est appelé “polynôme interpolateur de degré  $n$  aux points  $(a_k, b_k)$ ”. Cela vous rappelle-t-il quelque chose ?

**Correction :**

**Méthode :**

**Détails :**

- 1.
- 2.
- 3.

— **Exercice 12** ●●○ — **Evaluation en deux points** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , et soit  $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini par

$$u(P) = (P(2), P(3)).$$

1. On se place dans le cas  $n = 1$ . Déterminer une base de  $\ker(u)$  et de  $\text{Im}(u)$ . La fonction  $u$  est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Même question pour  $n = 2$ .
3. Même question pour  $n = 3$ .
4. (Plus dur). On revient au cas  $n \in \mathbb{N}$  quelconque. Décrire  $\ker(u)$ .

**Correction :**

**Méthode :**

1. Un polynôme de degré 1 qui s’annule en deux points ?
2. Un polynôme de degré 2 qui s’annule en deux points ?
3. Un polynôme de degré 3 peut s’annuler en deux points, il a alors une troisième racine réelle.
4. Rappelez-vous :  $P$  s’annule en  $\alpha$  si et seulement si... Quand on a deux racines, pensez à un critère de divisibilité pour justifier une factorisation.

**Détails :**

1. Soit  $P \in \ker u$ , alors  $\deg P = 1$  et  $P(2) = P(3) = 0$ . Ainsi,  $P$  a plus de racines que son degré, d'où  $P = 0$ . Ainsi,  $\ker u = \{0\}$ , et  $u$  est injective. Puisque  $\dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ , la fonction est aussi surjective, et  $\text{Im } u = \mathbb{R}^2$ . On vient de retrouver : étant donné  $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , par les deux points  $(2, y_1)$  et  $(3, y_2)$  passe un unique polynôme de degré au plus 1 (une droite).
2. Soit  $P \in \ker u$ , alors  $\deg P = 2$  et  $P(2) = P(3) = 0$ . Ainsi,  $P$  est de la forme

$$P = \alpha(X - 2)(X - 3), \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,  $\ker u = \text{Vect}((X - 2)(X - 3))$ , et  $\dim(\ker u) = 1$ . Pour l'image, on peut commencer par trouver sa dimension. Le théorème du rang donne

$$\dim(\text{Im } u) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\ker u) = 3 - 1 = 2.$$

Puisque  $\text{Im } u \subset \mathbb{R}^2$ , on déduit que  $\text{Im } u = \mathbb{R}^2$ .

3. On adapte la question précédente.
4. On fait appel au cours sur les polynômes :

$$P \in \ker u \iff P(2) = P(3) = 0 \iff \exists Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X] \text{ tel que } P = (X - 2)(X - 3)Q$$

Notez la contrainte  $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$  qui vient du fait que  $\deg P = n$ . Ainsi, on a

$$\ker u = \{(X - 2)(X - 3)Q, Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]\}$$

On écrivant  $Q = \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k$  on obtient

$$\ker u = \{(X - 2)(X - 3), (X - 2)(X - 3)X, \dots, (X - 2)(X - 3)X^{n-2}\}$$

et on déduit une base de  $\ker u$  puisque la famille ci-dessus est libre, car de degrés échelonnés. On a donc  $\dim(\ker u) = n - 1$ .

Pour les plus savants, on peut remarquer que la fonction  $Q \mapsto (X - 2)(X - 3)Q$  est un isomorphisme entre  $\mathbb{R}_{n-2}[X]$  et  $\ker u$ .

— **Exercice 13** ●●○ — **Endomorphisme avec la transposée** Soit  $u : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$  définie par

$$u(M) = M - M^T.$$

1. Montrer que  $u$  est un endomorphisme de  $M_3(\mathbb{R})$ .
2. Quel nom et notation a-t-on donné pour  $\ker(u)$  dans le chapitre sur les matrices ?
3. Retrouver la dimension de  $\ker(u)$ , en donner une base. Faire de même pour  $\text{Im}(u)$ .

**Correction :**

1. La fonction  $u$  étant clairement à valeurs dans  $M_3(\mathbb{R})$ , il suffit de montrer qu'elle est linéaire. Pour  $M_1$  et  $M_2$  dans  $M_3(\mathbb{R})$ , et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\begin{aligned} u(\alpha M_1 + \beta M_2) &= (\alpha M_1 + \beta M_2) - (\alpha M_1 + \beta M_2)^T \\ &= \alpha M_1 + \beta M_2 - (\alpha M_1^T + \beta M_2^T) \\ &= \alpha (M_1 - M_1^T) + \beta (M_2 - M_2^T) \\ &= \alpha u(M_1) + \beta u(M_2) \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $u$  est linéaire, et donc que c'est un endomorphisme de  $M_3(\mathbb{R})$ .

2. On a

$$M \in \ker u \iff u(M) = 0 \iff M - M^T = 0 \iff M = M^T.$$

En d'autres termes,  $M$  est dans  $\ker u$  si et seulement si  $M$  est une matrice symétrique de  $M_3(\mathbb{R})$ .

3. La description des matrices symétriques a été vue dans le chapitre sur la dimension : l'ensemble des matrices symétriques de taille  $n$  est de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$ , et donc ici c'est un sous-espace vectoriel de dimension 6. Une base en est donné par la famille

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Pour trouver  $\text{Im}(u)$ , on peut déterminer les images de la base canonique  $(E_{ij})$  par  $u$ , puisque on sait que  $\text{Im } u = \text{Vect} \left( (E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} \right)$  on trouve :

$$u(E_{11}) = u(E_{22}) = u(E_{33}) = 0,$$

tandis que

$$u(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -u(E_{21}),$$

$$u(E_{13}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -u(E_{31})$$

et

$$u(E_{23}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -u(E_{32})$$

Ainsi,

$$\text{Im } u = \text{Vect}(E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32}).$$

On reconnaît une base de l'ensemble des matrices antisymétriques, donc  $\text{rg } u = 3$ . ceci est en accord avec le théorème du rang :

$$\dim(\ker(u)) + \text{rg}(u) = 6 + 3 = 9 = \dim(M_3(\mathbb{R})).$$

**Remarque :** une solution qui ignore le fait qu'une base est transportée par  $u$  sur une famille génératrice de  $\text{Im } u$ , et qui passe facilement pour des matrices de taille  $n$ , est la suivante : on se donne  $A \in M_3(\mathbb{R})$ , et on cherche des conditions sur  $A$  pour que l'équation

$$A = u(M)$$

possède une solution  $M \in M_3(\mathbb{R})$ . Or

$$A = u(M) \iff A = M - M^T.$$

Il paraît logique de transposer cette équation :

$$A = u(M) \iff A^T = (M - M^T)^T = M^T - (M^T)^T = M^T - M.$$

En additionnant ces deux relations, on obtient

$$A + A^T = 0,$$

c'est-à-dire que  $A$  est antisymétrique. Réciproquement, si  $A$  est antisymétrique, on peut écrire

$$A = u\left(\frac{A}{2}\right),$$

ce qui prouve que  $A \in \text{Im}(u)$ .

— **Exercice 14** ●●● — **Endomorphisme avec la dérivée : lien avec une équation différentielle** Soit  $u : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  définie par

$$u : f \mapsto f'' + f' - 2f.$$

1. Montrer que  $u$  est un endomorphisme de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer une base de  $\ker u$  et sa dimension.
3. La fonction  $x \mapsto \sin x$  appartient-elle à  $\text{Im } u$  ?
4. Déterminer  $\ker(u) \cap \text{Im}(u)$ .